Cher Gilles

Etant assez pressé dans mon fax du 11/10, j'ai commis une erreur de calcul que tu as peut être relevée. Page 6, la forme correcte de l'équation (5) est

$$(5)\quad \Delta n(t,y) = \int_0^\infty S_0(y,z)\, c_0(y,z)\, \Delta n(t-y,z)\, dz - \Delta N(t)\, c_1(y)$$

avec
$$\begin{cases} c_0(y,z) = c(y,z,N_0) \\ c_1(y) = -\displaystyle\int_0^\infty S_0(y,z)\, n_0(z)\, \frac{\partial c}{\partial N}(y,z,N_0)\, dz \end{cases}$$

Avec cette formule modifiée pour c_1, le reste a l'air correct...

—||—

Ceci étant, avec un peu de recul, j'ai envie de laisser de côté, pour un moment, l'étude de la stabilité infinitésimale de la solution stationnaire car il me semble avoir repéré des propriétés plus générales de ces équations d'évolution, que j'aimerais d'abord élucider. Il est d'ailleurs possible que ces propriétés soient bien connues de certains spécialistes de mathématiques appliquées...

Les concepts que j'aimerais appliquer ici sont ceux de "attracteur" et de "variété inertielle"; j'ai consulté le livre de TEMAM, Infinite-dimensional Dynamical systems in Mechanics and Physics, Springer Verlag 1988.

—||—

Laisse-moi d'abord te donner une impression intuitive de ce qui se passe. Je ne prétends d'ailleurs pas être déjà capable de tout démontrer rigoureusement.

Les équations d'évolutions de ton modèle peuvent être vues comme une équation différentielle dans un espace de phases de dimension infinie : un point de l'espace de phases représente la répartition, à un instant donné, de la population par classe d'âge et âge de la mère à la naissance ; un tel point représente une condition initiale pour résoudre l'équation différentielle et détermine de façon unique une solution.

Une première propriété, biologiquement peu significative mais essentielle pour le traitement mathématique me semble être la suivante : il existe une partie compacte de l'espace des phases telle que toute solution se retrouve à partir d'un certain moment dans ce compact. [Il est essentiel pour cela que le taux de fécondité décroisse avec la population.]

En fait, je crois qu'il y a mieux. Le phénomène crucial (mathématiquement parlant) est l'aspect régularisant (sur la distribution en classes d'âge) du mécanisme des naissances ; grosso modo, des variations fortes entre classes d'âge voisines sont gommées dans les générations suivantes. Mathématiquement, cela se traduira, me semble-t-il, de la façon suivante.

Etant donné une solution des équations d'évolution

$$\dot{x}(t) = F(x(t))$$

tu peux considérer l'équation linéarisée qui décrit les petites variations de cette solution :

$$\Delta\dot{x}(t) = D_{x(t)}F\,(\Delta x(t))$$

C'est une équation linéaire dont les solutions s'écrivent
$$\Delta x(t) = A_t \cdot \Delta x(0)$$
où A_t est une application linéaire de l'espace des phases dans lui même. Il me semble que dans le cas qui nous occupe on a la propriété suivante : pour tout $t > 0$ et tout $\rho > 0$, le sous-espace associé aux "valeurs propres" (en fait "spectre") de A_t de module $> \rho$ est de dimension finie.

Cela pourrait conduire à une réduction à la dimension finie de la façon suivante. Dans l'espace des phases il existe une variété de dimension finie M, stable par l'équation d'évolution, telle que toutes les solutions convergent exponentiellement vite vers M. Il reste alors à étudier l'équation sur M... La variété M peut être faite d'un nombre fini de composantes.

Le cas le plus simple est celui où M ne consiste qu'en un nombre fini de points : ce sont des solutions stationnaires vers lesquelles convergent toutes les solutions (on a d'ailleurs vu qu'il n'y a qu'une seule solution stationnaire)

Le cas suivant est celui où M est de dimension 1 : cela donne des solutions périodiques (en temps) qui attirent les autres, et colle assez bien avec ce que tu vois numériquement. Mais il est a priori possible que la dimension de M soit un peu plus grande, et qu'on observe toutes sortes de dynamiques...

Concrètement, l'existence de cette variété M signifierait la chose suivante : l'état du "système" à l'instant t, c'est à dire la distribution par classes d'âge, est déterminé par un nombre fini de paramètres. Tu me diras qu'étant parti d'un modèle discret tu te trouvais déjà en dimension finie. Mais ce nombre que ~~qq~~ j'évoque est indépendant du pas de temps choisi.

La propriété essentielle liée à l'existence de M est la stabilité par rapport aux paramètres : si tu changes légèrement les taux de survie et de fécondité, ou même si tu introduis un léger "bruit" aléatoire, tu garderas une variété $\tilde{M}$ invariante proche de la variété initiale [par contre, il se pourrait que la dynamique sur $\tilde{M}$ soit assez différente de celle sur M].

Bon, je vais maintenant essayer d'être un peu plus spécifique.

—||—

Je reprends les notations de mes deux premiers fax. Je commence par réécrire les équations, suivant qu'on considère ou non la sénescence, et qu'on fait dépendre ou non le taux de survie de la population totale (Dans tous les cas, je fais dépendre le taux de fécondité de la population totale).

I) Avec SENESCENCE
Avec dépendance mortalité / population

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} S(t,t',z) = - S(t,t',z)\, s(t-t', z, N(t))$$

$$(2) \quad N(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty S(t, t-y, z)\, n(t-y, z)\, dy\, dz$$

$$(3) \quad n(t,y) = \int_0^\infty S(t, t-y, z)\, n(t-y, z)\, c(y, z, N(t))\, dz$$

—‖—

II) Avec Sénescence
Sans dépendance mortalité / population

$$(2) \quad N(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty S_0(y,z)\, n(t-y,z)\, dy\, dz$$

$$(3) \quad n(t,y) = \int_0^\infty S_0(y,z)\, n(t-y,z)\, c(y,z,N(t))\, dz$$

$$\left[\; S_0(y,z) = \exp\left(- \int_0^y s(u,z)\, du\right)\right]$$

III) SANS SENESCENCE
Avec dépendance mortalité / population

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} S(t,t') = - S(t,t')\, s(t-t', N(t))$$

$$(2) \quad N(t) = \int_0^\infty n(t-y)\, S(t, t-y)\, dy$$

$$(3) \quad n(t) = \int_0^\infty n(t-y)\, S(t,t-y)\, c(y, N(t))\, dy$$

IV) Sans SENESCENCE
Sans dépendance mortalité / reproduction

$$(2) \quad N(t) = \int_0^\infty S_0(y)\, n(t-y)\, dy$$

$$(3) \quad n(t) = \int_0^\infty S_0(y)\, n(t-y)\, c(y, N(t))\, dy .$$

$$\left[\; S_0(y) = \exp\left[- \int_0^y s(u)\, du\right]\right] .$$

—‖—

Au niveau des propriétés générales mentionnées plus haut, je ne crois pas qu'il y ait beaucoup de différences entre ces situations.

En tout cas, je préfère commencer par considérer la situation la plus simple, IV.

Pour simplifier techniquement les choses, je vais faire une hypothèse sur le taux de ~~survie~~ mortalité $s(y)$: aucun animal ne dépasse un âge $y = y_m$ (m pour mort ou maximum) ; plus précisément, on a

(i) $s(y) \geqslant s_0 > 0 \quad \forall\, y \in [0, y_m]$;

(ii) Pour $y \to y_m^-$, $s(y) \sim s_1 (y_m - y)^{-\alpha}$, avec $s_1 > 0$, $\alpha > 1$.

On a alors, lorsque $y \to y_m^-$

$$\int_0^y s(u)\,du \sim \frac{s_1}{\alpha - 1} (y_m - y)^{1-\alpha}$$

ce qui fait que, lorsqu'on prolonge S_0 pour $y \geqslant y_m$ par $S_0(y) \equiv 0$, la fonction S_0 est C^∞ (toutes ses dérivées s'annulent en y_m). [Je triche un peu, mais sans gravité].

Je suppose aussi que s, c sont C^∞ par rapport à y et N et que le taux de reproduction c vérifie

(iii) $0 \leqslant c(y, N) \leqslant c_0(N)$, $y \in [0, y_m]$, $N \geqslant 0$

où la fonction c_0 est décroissante en N, tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Je pose $c_0(0) = c_0$

Ceci étant, avec les notations de mon premier fax, soit $v_t(y)\,dy$ la répartition par classes d'âge de la population à l'instant t. Les équations (2), (3) de IV s'écrivent

$$(2) \quad N(t) = \int_0^\infty v_t(y)\,dy$$

$$(3) \quad n(t) = \int_0^\infty v_t(y)\, c(y, N(t))\,dy$$

Bien sûr, $v_t(y)$ et $n(t)$ sont reliés par

$$v_t(y) = S_0(y)\, n(t-y)$$
$$= \frac{S_0(y)}{S_0(y-\tau)}\, v_{t-\tau}(y-\tau).$$

le mot distribution n'est *pas* employé dans son sens mathématique

On se donne une distribution initiale $v_0(y)dy$ à l'instant 0. On ne suppose à priori aucune régularité sur v_0, seulement que

$$\begin{cases} 0 < N(0) = \int_0^\infty v_0(y)\,dy < +\infty \quad (\text{ouf !}) \\ v_0(y) = 0 \quad \text{pour } y \geq y_m \\ v_0(y) \geq 0 \quad \text{pour tout } y \geq 0. \end{cases}$$

[On pourrait même remplacer $v_0(y)dy$ par une mesure positive finie supportée par $[0, y_m]$ ...]

On peut démontrer (ce que je t'épargne) qu'on a alors existence et unicité d'une solution avec ces conditions initiales pour tout temps $t \geq 0$.

Ceci étant, on a, d'après (2), (3), et (iii) :

$$n(t) \leq c_0 N(t) \qquad t \geq 0$$

$$N(t+\Delta t) \leq N(t) + n(t)\Delta t, \quad t \geq 0, \ 1 \gg \Delta t \geq 0$$

ce qui garantit

$$N(t) \leq e^{c_0 t} N(0), \quad t \geq 0$$
$$n(t) \leq c_0 e^{c_0 t} N(0), \quad t \geq 0.$$

Donc, pour $t \geq y_m$, on a, pour tout $y \in [0, y_m]$

$$v_t(y) = S_0(y)\, n(t-y) \leq c_0 e^{c_0 t} N(0).$$

Ainsi, bien que je n'ai pas supposé initialement que v_0 était bornée $/y$, cela devient automatiquement vrai pour $t \geqslant y_m$ (une fois la génération initiale complètement éteinte), avec une borne qui ne dépend que de t et de la population initiale.

Pour $t \geqslant y_m$, les équations (2), (3) s'écrivent encore

$$(2') \qquad N(t) = \int_0^\infty S_0(y)\, n(t-y)\, dy = \int_{-\infty}^t S_0(t-u)\, n(u)\, du$$

$$(3') \qquad n(t) = \int_{-\infty}^t S_0(t-u)\, n(u)\, c(t-u, N(t))\, du$$

Il semble raisonnable de supposer que

(iv) $\quad c(0, N) \equiv 0 \quad$ (le taux de reproduction à la naissance est nul)

On obtient alors

$$\begin{cases} N'(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^t S_0'(t-u)\, n(u)\, du + n(t) \\[2ex] n'(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^t S_0(t-u)\, n(u)\, \frac{\partial c}{\partial y}(t-u, N(t))\, du \\[2ex] \qquad + N'(t) \displaystyle\int_{-\infty}^t S_0(t-u)\, n(u)\, \frac{\partial c}{\partial N}(t-u, N(t))\, du \\[2ex] \qquad + \displaystyle\int_{-\infty}^t S_0'(t-u)\, n(u)\, c(t-u, N(t))\, du \end{cases}$$

[les intégrales sont en fait entre $t - y_m$ et t, puisque S_0 s'annule pour $y \geqslant y_m$].

En présentant les choses peu rigoureusement (mais on peut le rendre rigoureux sans difficultés), on a le phénomène suivant.

En remplaçant $N'(t)$ dans la seconde équation par sa valeur tirée de la première, on exprime $n'(t)$ en fonction des valeurs de n dans l'intervalle $[t-y_m, t]$. On voit alors que si n est de classe C^r dans l'intervalle $[t_0-y_m, t_0]$, n sera de classe C^{r+1} dans l'intervalle $[t_0, t_0+y_m]$. C'est l'effet régularisant des mécanisme des naissances que j'ai évoqué plus haut.

Pour obtenir de la compacité, il faut aussi limiter la population totale. Or, compte tenu des hypothèses (i) et (iii), il existe $N_1 > 0$ tel qu'on ait, pour $N \geqslant N_1$:

$$c(y, N) - s(y) \leq c_0(N) - s_0 \leq -\frac{s_0}{2},$$

pour tout $y \in [0, y_m]$. On obtient donc, à partir de la formule

$$\begin{aligned} N'(t) &= \int_{-\infty}^{t} S_0'(t-u)\, n(u)\, du + n(t) \\ &= \int_{-\infty}^{t} S_0(t-u)\, n(u) \left[c(t-u, N(t)) - s(t-u) \right] du \end{aligned}$$

qu'on a $\qquad N'(t) \leq -\frac{s_0}{2} N(t) \qquad$ si $N(t) \geqslant N_1$.

Cela signifie que

a) quelque soient les conditions initiales, la population totale devient $\leq N_1$ au bout d'un certain temps.

b) une fois qu'elle est $\leq N_1$ (en particulier si elle l'est initialement) elle le reste.

On peut maintenant obtenir une partie compacte de l'espace des phases qui capture toutes les solutions comme suit.

Soit E l'espace de Banach des fonctions continues $v : [0, y_m] \longrightarrow \mathbb{R}$, qu'on munit de la norme uniforme $$\|v\| = \sup_y |v(y)|.$$

Dans E, on considère la partie K_L ($L > 0$ une constante assez grande) formée des fonctions v qui vérifient

(a) $\forall y, \quad 0 \leq v(y) \leq c_0 N_1 S_0(y)$;

(b) $N_v =: \int_0^\infty v(y)\, dy \leq N_1$

(c) $v(0) = \int_0^\infty v(y)\, c(y, N_v)\, dy$

(d) $\forall y, y' \quad |v(y) - v(y')| \leq L\, |y - y'|$.

Si on a choisi L suffisamment grand, on a les propriétés suivantes

1) Si la condition initiale $v_0(y)$ appartient à K_L on aura $v_t \in K_L$ pour tout $t \geq 0$;

2) Pour toute condition initiale (cf p. 7), pas nécessairement dans K_L, on aura $v_t \in K_L$ pour t assez grand;

3) K_L est une partie compacte de E.

Commentaires / Sketch de preuve :

1) Par le théorème d'Ascoli, la condition (d) assure que K_L est compact. [Les autres conditions sont fermées dans E].

2) Supposons que la condition initiale soit dans K_L. La condition c) garantit qu'on n'introduit pas de discontinuité en $y=0$ si on définit n pour $-y_m \leq y < 0$ par

$$n(y) = \frac{v_0(-y)}{S_0(-y)}$$

On a vu plus haut qu'on aura, pour $t \geq 0$

$$N(t) \leq N_1 \qquad \text{(cf. (b))}$$

$$n(t) \leq c_0\, N(t) \leq c_0 N_1$$

$$v_t(y) = S_0(y)\, n(t-y) \leq c_0 N_1 S_0(y) \qquad \text{(cf. (a))}$$

(3) $$v_t(0) = n(t) = \int_0^\infty v_t(y)\, c(y, N(t))\, dy \qquad \text{(cf. (c))}$$

Enfin, la condition (d) sera vérifiée par v_t (pour $t \geq 0$) en raison des formules p. 8 pour $n'(t)$ et $N'(t)$: le choix de L (assez grand) dépend des bornes dont on dispose pour $\frac{\partial c}{\partial y}$, $\frac{\partial c}{\partial N}$, S_0' ... mais un tel choix est toujours possible : je passe ici sur quelques détails encombrants mais sans intérêt....

Je m'arrête là pour aujourd'hui. On aimerait ensuite, dans K_L, trouver la variété M que j'évoquais plus haut (correspondant au fait que "toutes les directions sauf un nombre fini" sont exponentiellement contractées par l'équation d'évolution.)

A Bientôt.

Jean-Christophe.

P.S. J'ai bien reçu ton fax de vendredi

PPS. Ton modèle est mathématiquement intéressant, c'est ce qui me motive pour y consacrer du temps –

PPPS Ne devrait-on pas faire dépendre c et s périodiquement du temps (saisons) ?