Cher Gilles,

Suite de mes élucubrations...

Je vais écrire (en temps continu) le modèle général où taux de survie et de fécondité (c) ne dépendent que

- de l'âge de la bête ;
- de l'âge de sa mère au moment de la naissance ;
- de la population totale.

Par rapport à mon fax d'hier, les variables ont un peu changé :

- $N(t)$: population totale à l'instant t ;
- $n(t,y)\,\Delta y\,\Delta t$: le nombre de naissances, entre les instants t et $t+\Delta t$, de mères dont l'âge est compris entre y et $y+\Delta y$;
- $c(y,z,N)$: le taux de reproduction des femelles d'âge y, nées d'une mère d'âge z (à la naissance), lorsque la population totale est N.
- $s(y,z,N)$: le taux de mortalité de la même catégorie.

Passons aux équations qui régissent ces quantités.

On introduit d'abord une variable auxiliaire :

$S(t, t', z)$: la proportion de femelles nées à l'instant t' d'une mère d'âge z, qui ont survécu jusqu'à l'instant t.

(On a $t \geq t'$ et $0 \leq S(t,t',z) \leq 1$)

—॥—

Equation gouvernant S :

(1) $$\frac{\partial}{\partial t} S(t,t',z) = - S(t,t',z)\, s(t-t', z, N(t))$$

—॥—

Equation gouvernant N :

(2) $$N(t) = \int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{\infty} S(t, t-y, z)\, n(t-y, z)\, dz\, dy$$

—॥—

Equation gouvernant les naissances

(3) $$n(t, y) = \int_0^{+\infty} S(t, t-y, z)\, n(t-y, z)\, c(y, z, N(t))\, dz$$

—॥—

Il est raisonnable de d'abord chercher des solutions stationnaires, c.a.d

$$N(t) \equiv N_0$$

$$n(t,y) \equiv n_0(y)$$

De l'équation (1), on tire alors

$$S(t,t',z) = S_0(t-t', z, N_0),$$

avec
$$S_0(\tau, z, N_0) = \exp\left[-\int_0^\tau s(u,z,N_0)\,du\right].$$

Puis (2) donne

$$(2') \qquad N_0 = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty S_0(y,z,N_0)\, n_0(z)\, dz\, dy$$

et (3) devient

$$(3') \qquad n_0(y) = \int_0^{+\infty} S_0(y,z,N_0)\, c(y,z,N_0)\, n_0(z)\, dz.$$

On peut résoudre de façon unique, moyennant des hypothèses raisonnables!

En effet, notons T_{N_0} l'opérateur (cf (3'))

$$T_{N_0} w(y) = \int_0^{+\infty} S_0(y,z,N_0)\, c(y,z,N_0)\, w(z)\, dz.$$

C'est un opérateur positif (type Perron-Frobenius) qui aura une unique (à un scalaire près) fonction propre w_{N_0} positive associée à une valeur propre $\lambda_{N_0} > 0$ (qui est la plus grande valeur propre de T_{N_0}).

La fonction

$$N_0 \longrightarrow S_0(y,z,N_0)\, c(y,z,N_0)$$

peut raisonnablement être supposé décroissante (c.a.d : les taux de survie et de reproduction diminuent lorsque la population augmente). Donc

$$N_0 \longrightarrow \lambda_{N_0}$$

est aussi décroissante. Pour N_0 petit, il est raisonnable de penser que $\lambda_{N_0} > 1$ (sinon il n'y a pas de campagnols...) ; pour N_0 grand, $\lambda_{N_0} < 1$ (sinon il y a trop de campagnols...). Donc il existe une unique valeur de N_0 tel que $\lambda_{N_0} = 1$.

Avec cette valeur de N_0, on prend

$$n_0(y) = w_{N_0}(y) \cdot n_0$$

avec

$$n_0 = N_0 \left[\int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} S_0(y,z,N_0)\, w_{N_0}(z)\, dz\, dy \right]^{-1}$$

de façon à satisfaire (2').

Ayant trouvé une unique solution stationnaire, le pas suivant est de s'enquérir de sa stabilité infinitésimale.

Pour simplifier un peu, je vais faire pour le moment l'hypothèse suivante :

(H) Le taux de mortalité s ne dépend pas de la population totale N.

[Tu ne m'a pas indiqué une telle dépendance... Est-ce bien réaliste?..]

Mathématiquement, l'avantage est qu'on peut résoudre l'équation (1) séparément:

$$S(t, t', z) = S_0(t-t', z)$$

avec

$$S_0(\tau, z) = \exp\left[-\int_0^{\tau} s(u, z)\,du\right]$$

Les équations (2), (3) deviennent

$$(2'') \qquad N(t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} S_0(y,z)\, n(t-y,z)\,dy\,dz$$

$$(3'') \qquad n(t,y) = \int_0^{\infty} S_0(y,z)\, n(t-y,z)\, c(y,z,N(t))\,dz$$

On cherche une solution

$$N(t) = N_0 + \Delta N(t)$$

$$n(t,y) = n_0(y) + \Delta n_0(t,y)$$

perturbation de la précédente. En ne gardant que les termes de 1er ordre, on obtient:

$$(4) \qquad \Delta N(t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} S_0(y,z)\, \Delta n(t-y,z)\,dy\,dz$$

~~(5'') $\Delta n(t,y) = \int_0^{\infty} S_0(y,z)\, c_0(y,z)\, \Delta n(t-y,z)\,dz$ ...~~

$$(5) \quad \Delta n(t,y) = \int_0^\infty S_0(y,z)\, c_0(y,z)\, \Delta n(t-y,z)\, dz - c_1(y)\, \Delta N(t)$$

avec

$$\begin{cases} c_0(y,z) = c(y,z,N_0) \\ c_1(y) = -\displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial c}{\partial N}(y,z,N_0)\, dz \end{cases}$$

[Il semble raisonnable de supposer $\frac{\partial c}{\partial N} \leqslant 0$ d'où $c_1 \geqslant 0$]

Pour étudier le système linéaire (4) + (5), on cherche des solutions

$$\begin{cases} \Delta N(t) = e^{\mu t}\, \Delta N \\ \Delta n(t,y) = e^{\mu t}\, \Delta n(y) \end{cases}$$

où μ a priori est complexe (ainsi que ΔN, Δn).

On obtient

$$\Delta N = \int_0^\infty \int_0^\infty S_0(y,z)\, e^{-\mu y}\, \Delta n(z)\, dy\, dz$$

$$\Delta n(y) = e^{-\mu y} \int_0^\infty S_0(y,z)\, c_0(y,z)\, \Delta n(z)\, dz - c_1(y)\, \Delta N$$

Soit :

$$(5') \quad \Delta n(y) = \int_0^{+\infty} K(y,z,\mu)\, \Delta n(z)\, dz$$

avec

$$K(y,z,\mu) = S_0(y,z)\, c_0(y,z)\, e^{-\mu y} - c_1(y) \int_0^{+\infty} S_0(u,z)\, e^{-\mu u}\, du$$

Il s'agit de comprendre pour quelles valeurs de μ l'opérateur

$$T_\mu : \quad T_\mu w(y) = \int_0^{+\infty} K(y,z,\mu)\, w(z)\, dz$$

a une valeur propre égale à 1. (avec vecteur propre Δn pas trop déconnant...).

Suite au prochain épisode...

J'ai de la bureaucratie à expédier.

A Bientôt.

Jean-Christophe.