Cher Gilles,

J'ai bien reçu ton fax et te livre mes premières réactions.

Tout d'abord, sans pour autant abandonner les modèles à temps discret, on a envie de regarder aussi des modèles à temps continu.

1 Version primitive : a_i, b_i, s_i ~~indé~~constantes fixées ; je note c le produit ab.

Notations : - $v(t,y)\Delta y = v_t(y)\Delta y$: nombre de femelles à l'instant t, d'âge compris entre y et $y+\Delta y$

- $s(y)$: taux de mortalité des femelles d'âge y
- $c(y)\Delta y$: taux de reproduction des femelles d'âge compris entre y et $y+\Delta y$

Equations :

$$\begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ y \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1) \quad \dfrac{\partial}{\partial t} v_t(y) = \underbrace{-s(y)v_t(y)}_{\text{mortalité}} - \underbrace{v_t'(y)}_{\text{passage du temps}} \\[2ex] (2) \quad v_t(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} v_t(y)\,c(y)\,dy \end{cases}$$

C'est un système linéaire. Comme dans le cas discret, on s'attend à converger vers une fonction propre :

$$v_t(y) = e^{\lambda t} v(y) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Une solution de cette forme donne

$$(1) \Rightarrow \quad v' + \lambda v = -s v \quad \Rightarrow \quad v(y) = v(0)\, e^{-\lambda y} S(y)$$

$$\left(\text{où } S(y) = \exp\left(-\int_0^y s(u)\,du\right)\right)$$

$$(2) \Longrightarrow \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} S(y)\, c(y) = 1$$

La seconde équation détermine λ (le membre de gauche est strictement décroissant en λ) de façon unique.

Evidemment, soit $\lambda = 0$ par miracle et on a un régime stationnaire, soit $\lambda < 0$ et il ne reste rapidement plus personne, soit $\lambda > 0$ et il y a des campagnols partout !

(2) Si tu introduit la sénescence, il me semble qu'il faut modifier le modèle ci dessus de la façon suivante :

$v(t, y, z)\, \Delta y\, \Delta z = v_t(y, z)\, \Delta y\, \Delta z$: nombres de femelles à l'instant t, d'âge compris entre y et $y + \Delta y$, dont la mère à leur naissance (à l'instant $t-y$) avait un âge compris entre z et $z + \Delta z$.

$s(y, z)$: taux de mortalité des femelles précédentes

$c(y, z)$: taux de reproduction des femelles précédentes.

On obtient

$t \in \mathbb{R}$, $y, z \geq 0$

(1) $$\frac{\partial}{\partial t} v_t(y, z) = - s(y, z)\, v_t(y, z) - \frac{\partial}{\partial y} v_t(y, z)$$

(2) $$v_t(0, y) = \int_0^{+\infty} c(y, z)\, v_t(y, z)\, dz$$

C'est toujours un système linéaire, avec la même positivité qu'avant. Dans la première équation, on peut voir z comme un paramètre. On cherche, de même qu'avant

$$v_t(y, z) = e^{\lambda t} v(y, z)$$

d'où

(1) $\Rightarrow$ $$v(y, z) = \underbrace{v(0, z)\, e^{-\lambda y}\, S(y, z)}$$

avec $$S(y, z) = \exp\left(- \int_0^y s(u, z)\, du\right) ;$$

(2) $\Rightarrow$ $$\underbrace{v(0, y) = \int_0^{\infty} c(y, z)\, v(0, z)\, e^{-\lambda y} S(y, z)\, dz}_{(3)}.$$

L' opérateur

$$T_\lambda \;:\; w \longrightarrow T_\lambda w(y) = \int_0^\infty c(y,z)\, S(y,z)\, e^{-\lambda y} w(z)\, dz$$

a une plus grande valeur propre $\mu(\lambda)$ associée à un vecteur propre w_λ. L'application $\lambda \longrightarrow \mu(\lambda)$ est strictement décroissante, et on peut donc uniquement déterminer λ de façon à avoir $\mu(\lambda) = 1$. On a finalement (avec ce choix de λ)

$$v(y, z) = e^{-\lambda y} S(y,z)\, w_\lambda(z)$$

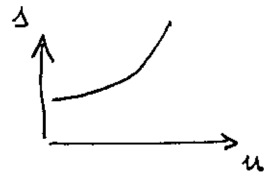
Ce modèle, étant toujours linéaire, souffre des mêmes inconvénients que le précédent : si $\lambda \neq 0$, on a des problèmes....

(3) Il semble donc essentiel, si on veut pouvoir expliquer un phénomène périodique ou quasipériodique ou autre... de faire dépendre c ou/et s d'un paramètre comme la densité globale. Par exemple

$$s = s(y, z, \|v_t\|_1)$$

où $\|v_t\|_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty v_t(y,z)\, dy\, dz$

et $u \longrightarrow s(y, z, u)$ est croissante



Je vais commencer à regarder dans cette direction... à suivre....

Commentaires : Moralement, il n'y a pas de différences mathématiques entre temps discret et continu. De toutes façons, pour résoudre numériquement le modèle continu on rediscrétise... Mais il est plus facile en temps continu de traiter des exemples ad hoc en écrivant des solutions explicites, pour essayer de deviner ce qui se passe en général.

Je vais continuer à regarder les modèles non linéaires, pour voir si j'y comprends quelque chose. N'hésite pas à me demander des explications sur ce qui précède...
(Ce n'est pas 100% rigoureux techniquement parlant, mais je crois que c'est moralement correct...)

A tout. Jean-Christophe.