Sur la taille des membres de l'ensemble de Mandelbrot.

J.C. Yoccoz.

<u>Notations et Rappel.</u> On note D le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0\}$. Par convention, le module d'un cylindre de hauteur h, de circonférence ℓ est $\frac{h}{\ell}$, de sorte que le module de l'anneau $\{1 < |z| < R\}$ est $\frac{\log R}{2\pi}$. On ~~rapp~~ note $\operatorname{mod}(A)$ le module d'un anneau A. On rappelle que si un anneau A contient des anneaux disjoints $A_1, \dots, A_n$ concentriques à A, on a $\operatorname{mod}(A) \geq \sum_i \operatorname{mod}(A_i)$.

Soit f un polynome de degré $d \geq 2$, K son ensemble de Julia rempli, et a un point périodique répulsif de f, de période n.

On suppose K connexe, de sorte que les points critiques de f appartiennent à K, et on choisit une représentation conforme $\varphi : \mathbb{C} - D \longrightarrow \mathbb{C} - K$ telle que :

$$\varphi(z^d) = f(\varphi(z)) \quad , \quad z \in \mathbb{C} - D .$$

Appelons rayon externe l'image par φ d'une demi-droite $\{re^{i\theta} \mid r > 1,\ \theta = \theta_0\}$. L'ensemble des rayons externes aboutissant en a est alors fini, et invariant par f^n ; si q est leur nombre, on ~~les~~ ~~note~~ ~~choisit~~ ~~une~~ ~~in~~ les note $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}$, de façon que l'indexation préserve l'ordre cyclique. Il existe alors $p \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ tel que $f^n(A_i) = A_{i+p}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Théorème Il existe ~~un réel θ~~ $\theta \in \mathcal{H}$ qui vérifie

(1) $0 < \dfrac{|\theta|^2}{\mathrm{Re}\,\theta} \leq \dfrac{2n \operatorname{Log} d}{q}$

(2) $(f^n)'(a) = \exp\left(2\pi i \frac{p}{q} + \theta\right)$

Remarque : Lorsque $f(z) = z^2 - 2$, $d = 2$, $a = 2$, $q = 1$, $n = 1$, $p = 0$, $\theta = \mathrm{Re}\,\theta = \operatorname{Log} 4$, on a égalité dans (1) -

Démonstration : On suppose que $a = 0$, et (en remplaçant f par f^n) que 0 est un point fixe répulsif de f. On pose $\lambda = f'(0)$. D'après Poincaré, l'unique série formelle $H(z) = z + \cdots$ qui vérifie $H(\lambda z) = f(H(z))$ définit une fonction entière sur $\mathbb{C}$. Posons $U = \mathbb{C} - H^{-1}(K)$. On a $U = \lambda$

Lemme 1 : L'application H, restreinte à toute composante connexe W de U est un revêtement universel de W sur $\mathbb{C} -$

Démonstration du lemme. Les valeurs critiques de H sont les points des orbites positives des points critiques de f, donc sont contenues dans K. En appliquant f^{-1}, on voit aussi que les valeurs asymptotiques de H sont ~~aussi~~ contenues dans K. Donc $H_{/W}$ est un revêtement de W sur $\mathbb{C} - K$. Soit C une courbe fermée dans U ; si $H(C)$ entoure r fois K, $H(\lambda^{-k} C)$ entoure $\frac{r}{d^k}$ fois K, donc $r = 0$ et toute composante de U est simplement connexe. ◻

Pour $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, notons A_i' la composante connexe de $H^{-1}(A_i)$ qui aboutit en 0 et U_i la composante connexe de U qui contient A'_i. On a :

$$\begin{cases} \lambda A'_i = A'_{i+r} \\ \lambda U_i = U_{i+r} \end{cases}$$

Notons T la multiplication par λ^q ; on a $TA'_i = A'_i$, $TU_i = U_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

<u>Lemme 2 : $U_i/(T^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un anneau $\mathcal{A}_i$ dont le module est égal à $\dfrac{\pi}{q \log d}$</u>

<u>Démonstration du lemme</u>. L'action de T sur U_i relève celle de f^q sur $\mathbb{C} - K$, qui est conjugué à $z \to z^{d^q}$ sur $\mathbb{C} - D$; cette dernière action est relevée par la multiplication par d^q dans $\mathcal{H}$, et le lemme en résulte.

Nous obtenons maintenant le théorème en estimant différemment le module de $\mathcal{A}$.

Choisissons un réel b et des réels $b < b_0 < \dots < b_{q-1} < b$ tels que $\exp(2\pi i b_j) \in A'_j$. Soit $n \in \mathbb{Z}$; on écrit $n = mq + j$, $m \in \mathbb{Z}$, $0 \le j < q$; on note B_n la composante connexe de $\exp^{-1}(A'_j)$ qui contient $2\pi i (b_j + m)$, et V_n la composante connexe de $\exp^{-1}(U_j)$ qui contient B_n. Il existe un unique $\theta \in \mathcal{H}$ tel qu'on ait :

$$\begin{cases} \exp(2\pi i\, p/q + \theta) = \lambda \\ \left.\begin{array}{l} B_n + q\theta = B_n \\ V_n + q\theta = V_n \end{array}\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Notons $\tilde{T}$ la translation par $q\theta$. Alors $V_n / (\tilde{T}^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\mathcal{C}_j$ (avec $n \equiv j$ dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$).

Pour $N > 0$, notons $\mathcal{A}_N$ l'anneau obtenu en quotientant par $\tilde{T}$ la bande délimitée par B_0 et B_N. Il est clair qu'on a :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\operatorname{mod}(\mathcal{A}_N)}{N} = \frac{\operatorname{Re}\theta}{q^2|\theta|^2} \times 2\pi$$

D'après le résultat rappelé au début, il existe donc un anneau $\mathcal{C}_j$ dont le module vérifie :

$$\operatorname{mod}(\mathcal{C}_j) \leq \frac{\operatorname{Re}\theta}{q^2|\theta|^2} \times 2\pi \quad .$$

En utilisant le lemme ~~de~~ 2, on obtient l'estimation du théorème. $\blacksquare$