# SUR LA TAILLE DES MEMBRES DE L'ENSEMBLE DE MANDELBROT

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

0.1. **Notations et Rappel.** On note $D$ le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Par convention, le module d'un cylindre de hauteur $h$, de circonférence $\ell$ est $\frac{h}{\ell}$, de sorte que le module de l'anneau $\{1 < |z| < R\}$ est $\frac{\log R}{2\pi}$. On note $\mathrm{mod}(A)$ le module d'un anneau $A$. On rappelle que si un anneau $A$ contient des anneaux disjoints $A_1, \ldots, A_n$ concentriques à $A$, on a $\mathrm{mod}(A) \geqslant \sum \mathrm{mod}(A_i)$.

0.2. **.** Soit $f$ un polynome de degré $d \geqslant 2$, $K$ son ensemble de Julia rempli, et $a$ un point périodique répulsif de $f$, de période $n$.

On suppose $K$ connexe, de sorte que les points critiques de $f$ appartiennent à $K$, et on choisit une représentation conforme $\varphi : \mathbb{C} - D \to \mathbb{C} - K$ telle que :

$$\varphi(z^d) = f(\varphi(z)), \quad z \in \mathbb{C} - D$$

Appelons rayon externe l'image par $\varphi$ d'une demi-droite $\{re^{i\theta} : r > 1, \theta = \theta_0\}$. L'ensemble des rayons externes aboutissant en $a$ est alors fini, et invariant par $f^n$ ; si $q$ est leur nombre, on les note $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}$, de façon que l'indexation préserve l'ordre cyclique. Il existe alors $p \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ tel que $f^n(A_i) = A_{i+p}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

**Théorème 1.** *Il existe $\theta \in \mathcal{H}$ qui vérifie*

*(1)* $0 < \frac{|\theta|^2}{\mathit{Re}\,\theta} \leqslant \frac{2n \log d}{q}$

*(2)* $(f^n)'(a) = \exp\left(2\pi i \frac{p}{q} + \theta\right)$

**Remarque 2.** Lorsque $f(z) = z^2 - 2$, $d = 2$, $a = 2$, $q = 1$, $n = 1$, $p = 0$, $\theta = \mathrm{Re}\,\theta = \log 4$, on a égalité dans (1).

*Démonstration.* On suppose que $a = 0$, et (en remplaçant $f$ par $f^n$) que $0$ est un point *fixe* répulsif de $f$. On pose $\lambda = f'(0)$. D'après Poincaré, l'unique série formelle $H(z) = z + \ldots$ qui vérifie $H(\lambda z) = f(H(z))$ définit une fonction *entière* sur $\mathbb{C}$. Posons $U = \mathbb{C} - H^{-1}(K)$. On a $U = \lambda U$.

**Lemme 1.** *L'application $H$, restreinte à toute composante connexe $W$ de $U$ est un revêtement universel de $W$ sur $\mathbb{C} - K$.*

*Démonstration du lemme.* Les valeurs critiques de $H$ sont les points des orbites positives des points critiques de $f$, donc sont contenus dans $K$. En appliquant $f^{-1}$, on voit aussi que les valeurs asymptotiques de $H$ sont contenus dans $K$. Donc $H|_W$ est un revêtement de $W$ sur $\mathbb{C} - K$. Soit $C$ une courbe fermée dans $U$ ; si $H(C)$ entoure $r$ fois $K$, $H(\lambda^{-k} C)$ entoure $\frac{r}{d^k}$ fois $K$, donc $r = 0$ et toute composante de $U$ est simplement connexe. $\square$

0. Le manuscrit original a été converti en 'tex' par Carlos Matheus.

Pour $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, notons $A'_i$ la composante connexe de $H^{-1}(A_i)$ qui aboutit en $0$ et $U_i$ la composante de $U$ qui contient $A'_i$. On a :

$$\begin{cases} \lambda A'_i = A'_{i+r} \\ \lambda U_i = U_{i+r} \end{cases}$$

Notons $T$ la multiplication par $\lambda^q$, on a $TA'_i = A'_i$, $TU_i = U_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

**Lemme 2.** *$U_i/(T^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un anneau $\mathcal{A}_i$ dont le module est egal à $\frac{\pi}{q \log d}$.*

*Démonstration du lemme.* L'action de $T$ sur $U_i$ relève celle de $f^q$ sur $\mathbb{C} - K$, qui est conjugué à $z \mapsto z^{d^q}$ sur $\mathbb{C} - D$ ; cette dernière action est relevée par la multiplication par $d^q$ dans $\mathcal{H}$, et le lemme en résulte. □

Nous obtenons maintenant le théorème en estimant différemment le module de $\mathcal{A}$.

Choisissons un réel $b$ et des réels $b < b_0 < \cdots < b_{q-1} < b + 1$ tels que $\exp(2\pi i b_j) \in A'_j$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ ; on écrit $n = mq + j$, $m \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant j < q$ ; on note $B_n$ la composante connexe de $\exp^{-1}(A'_j)$ qui contient $2\pi i(b_j + m)$, et $V_n$ la composante connexe de $\exp^{-1}(U_j)$ qui contient $B_n$. Il existe un unique $\theta \in \mathcal{H}$ tel qu'on ait :

$$\begin{cases} \exp\left(2\pi i \frac{p}{q} + \theta\right) = \lambda \\ \left.\begin{aligned} B_n + q\theta = B_n \\ V_n + q\theta = V_n \end{aligned}\right\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Notons $\widetilde{T}$ la translation par $q\theta$. Alors $V_n/(\widetilde{T}^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\mathcal{A}_j$ (avec $n \equiv j$ dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$).

Pour $N > 0$, notons $\mathfrak{A}_N$ l'anneau obtenu en quotientant par $\widetilde{T}$ la bande délimitée par $B_0$ et $B_N$. Il est clair qu'on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathrm{mod}(\mathfrak{A}_N)}{N} = \frac{\mathrm{Re}\,\theta}{q^2|\theta|^2} \times 2\pi$$

D'après le résultat rappelé au début, il existe donc un anneau $\mathcal{A}_j$ dont le module vérifie :

$$\mathrm{mod}(\mathcal{A}_j) \leqslant \frac{\mathrm{Re}\,\theta}{q^2|\theta|^2} \times 2\pi$$

En utilisant le lemme 2, on obtient l'estimation du théorème. □