

Structure des orbites des homéomorphismes analytiques possédant un point critique.

1. Soit f un homéomorphisme analytique du cercle, préservant l'orientation, dont le nombre de rotation α est irrationnel. On suppose que f a exactement un point critique a_0 .

Notations: $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ sera la suite des réduites de α ;

• $a_i = f^{-i}(a_0)$, pour $i \in \mathbb{Z}$;

• pour $a < b < c < d < a+1$, on pose $[a, b, c, d] = \frac{b-a}{c-a} \frac{d-c}{d-b}$;

• pour $n \geq 0$, on pose

$$m_n(x) = |f^{q_n}(x) - x|,$$

$$I_n(x) = \begin{cases} [x, f^{q_n}(x)] & \text{si } n \text{ pair,} \\ [f^{q_n}(x), x] & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

$$K_n = \{ a_i, 0 \leq i < q_n \}.$$

Convention: Dans les estimations qu'on fera par la suite, les constantes notées c de façon générique ne dépendront que de grandeurs macroscopiques liées à f (telles que l'ordre du point critique, la variation de $\log Df$ sur le complémentaire d'un voisinage du point critique...) mais pas de l'arithmétique.

Rappels. 1. lorsqu'on parcourt \mathbb{T}^1 dans le sens positif, ②

pour n pair (resp. impair), le point de K_n suivant (resp. précédent) un point a_i ($0 \leq i < q_n$) est a_j

$$\text{avec} \quad \begin{aligned} j &= i + q_{n-1} & \text{si } 0 \leq i < q_n - q_{n-1} \\ j &= i + q_{n-1} - q_n & \text{si } q_n - q_{n-1} \leq i < q_n. \end{aligned}$$

2. Les intervalles $\# I(f^j(x))$, $0 \leq j < q_{n+1}$ sont d'intérieurs disjoints.

$$3. \text{ On a } \bigcup_{0 \leq j < q_{n+1} + q_n} I(f^j(x)) = \mathbb{T}^1.$$

4. Soient $a < b < c < d < a+1$, et $N > 0$. On a:

$$[f^N(a), f^N(b), f^N(c), f^N(d)] \leq c^m [a, b, c, d],$$

$$\text{où } m = \max_{x_0 \in \mathbb{T}^1} \# \{j, 0 \leq j < N, x \in (f^j(a), f^j(d))\}$$

5. Soient $a < b < c < d < a+1$, et $N > 0$. Si l'intervalle (a, d) ne contient aucun des points a_j , $0 \leq j < N$, et si on a $Sf^N \leq 0$ sur (a, d) , alors

$$[f^N(a), f^N(b), f^N(c), f^N(d)] \leq [a, b, c, d].$$

On rappelle que Sf désigne la dérivée de Schwarzienne de f :

$$\begin{aligned} Sf &= D^2 \log Df - \frac{1}{2} (D \log Df)^2 \\ &= (D^3 f Df - \frac{3}{2} (D^2 f)^2) Df^{-2} \\ &= -2 (Df)^{-1/2} D^2 (Df^{-1/2}). \end{aligned}$$

2. Fixons $n \geq 0$, pair pour fixer les idées. Posons $q = q_n$, $m = m_n$, $I(x) = I_n(x)$ pour $x \in \mathbb{T}^1$ et

$$\Delta(x) = [f^{-q}(x), x, f^q(x), f^{2q}(x)], \text{ pour } x \in \mathbb{T}^1.$$

Lemme. Pour $x \in \mathbb{T}^1$, $z \in I(x)$, on a

$$m(x) \geq c^{-1} \inf(m(z), m(f^{-q}(z)))$$

Démonstration: Posons $\theta = \frac{m(f^{-q}(z))}{m(z)}$, $\varepsilon = \frac{m(x)}{m(z)}$; il s'agit de démontrer qu'on a

$$\varepsilon > c^{-1} \inf(\theta, 1),$$

Or on a

$$\Delta(x) = \frac{m(f^q(x))}{m(x) + m(f^q(x))} \quad \frac{m(f^{-q}(x))}{m(x) + m(f^{-q}(x))}$$

et $m(f^q(x)) \geq f^q(z) - f^q(x) \geq (1-\varepsilon)m(z)$,
 $m(f^{-q}(x)) \geq x - f^{-q}(z) \geq (\theta - \varepsilon)m(z)$,
 $\frac{f^{-q}(x) \quad f^{-q}(z) \quad x \quad z \quad f^q(x) \quad f^q(z) \quad f^{2q}(x)}$

donc

$$\Delta(x) \geq \frac{(1-\varepsilon)(\theta - \varepsilon)}{\theta},$$

d'autre part $\Delta(f^{-q}(x)) \leq \frac{m(x)}{m(x) + m(f^{-q}(x))} \leq \frac{\varepsilon}{\theta}$,

d'où $(1-\varepsilon)(\theta - \varepsilon) \leq c\varepsilon$

(car $\Delta(x) \leq c \Delta(f^{-q}(x))$) ce qui donne le lemme. \square

Proposition: Pour $x \in \mathbb{T}^1$, $z \in I(x)$, on a

$$c^{-1} m(x) \leq m(z) \leq c m(x)$$

Démonstration. D'après le lemme, il suffit de montrer

qu'on a, pour $z \in \mathbb{T}^1$

$$c^{-1} m(z) \leq m(f^{-q}(z)) \leq c m(z)$$

(4)

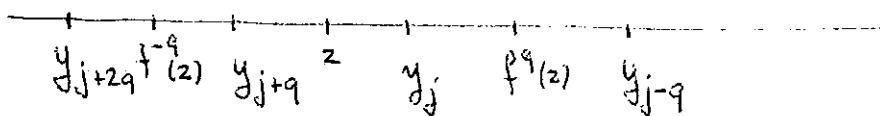
Soit y un point où m atteint son minimum ; posons $y_j = f^{-j}(y)$ pour $j \in \mathbb{Z}$.

Soit $z \in \mathbb{T}^1$; Soit j le plus petit entier positif ou nul tel que $y_j \in I(z)$.

On a $j \leq q_{n+1} + q$ (cf rappels) et $\Delta(y) \geq \frac{1}{4}$,

donc

$$\Delta(y_j) \geq c^{-1}, \quad \Delta(y_{j+q}) \geq c^{-1}, \quad \Delta(y_{j+2q}) \geq c^{-1}.$$



$$\text{On a } m(y_{j+q}) \geq c^{-1} m(y_j) \quad \text{car } \Delta(y_j) \geq c^{-1}$$

$$\left. \begin{aligned} m(y_{j+2q}) &\geq c^{-1} m(y_{j+q}) \\ m(y_j) &\geq c^{-1} m(y_{j+q}) \end{aligned} \right\} \text{car } \Delta(y_{j+q}) \geq c^{-1}$$

$$m(y_{j+q}) \geq c^{-1} m(y_{j+2q}) \quad \text{car } \Delta(y_{j+2q}) \geq c^{-1}.$$

On a donc

$$m(z) \leq m(y_{j+q}) + m(y_j) \leq c m(y_j)$$

$$m(f^{-q}(z)) \leq m(y_{j+2q}) + m(y_{j+q}) \leq c m(y_j)$$

et d'après le lemme

$$m(f^{-q}(z)) \geq c^{-1} \inf(m(y_{j+2q}), m(y_{j+q})) \geq c^{-1} m(y_j)$$

$$m(z) \geq c^{-1} \inf(m(y_{j+q}), m(y_j)) \geq c^{-1} m(y_j).$$

□

Corollaire 1. f est minimal.

Démonstration: Si f était un contre exemple de Denjoy, de Cantor invariant L , on aurait, pour l'extrémité droite y d'un intervalle du complémentaire de L

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} m_{2n}(z) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_{2n}(f^{-q_{2n}}(z)) > 0.$$

□

Corollaire 2. Il existe $c > 0$ tel qu'on ait

$$\|Df^{q_n}(x)\| < c, \quad \forall x \in \mathbb{T}^1, n \geq 0.$$

Démonstration: Posons, pour $y \in \mathbb{T}^1$, $I(f^{-q_n}(x))$

$$\Delta(y, x) = [y, x, f^{q_n}(x), f^{2q_n}(x)]$$

(on suppose n pair pour fixer les idées).

On a $c^{-1} \frac{x-y}{m_n(x)} \leq \frac{\Delta(y, x)}{m_n(x)} \leq c \frac{x-y}{m_n(x)}$, d'après la proposition

et

$$\Delta(f^{q_n}(y), f^{q_n}(x)) \leq c \Delta(y, x)$$

$$c^{-1} m_n(x) \leq m_n(f^{q_n}(x)) \leq c m_n(x).$$

d'après la proposition. On a donc

$$\|f^{q_n}(x) - f^{q_n}(y)\| \leq c \|x - y\| \text{ et le corollaire } \square$$

Corollaire 3. Pour $x \in \mathbb{T}^1$, $n \geq 0$, $0 \leq i < q_{n+1}$, on a:

$$Df^i(x) \leq c \frac{m_n(f^i(x))}{m_n(x)}$$

Démonstration: En effet, on a (avec les notations du corollaire 1)

$$\Delta(f^i(y), f^i(x)) \leq c \Delta(y, x)$$

$$f^i(x) - f^i(y) \leq c \Delta(f^i(y), f^i(x)) m_n(f^i(x))$$

$$\Delta(y, x) \leq c \frac{x-y}{m_n(x)}. \quad \square$$

~~Corollaire 4. Il existe $c > 0$ tel que l'on ait,~~

~~pour n assez grand et $x \in \mathbb{T}^1$~~

~~$$S_A^{q_{n+1}}(x) \leq -c (m_n(x))^{-2} (\leq 0)$$~~

~~Démonstration.~~

(6)

Corollaire 4. Pour n assez grand et $x \in I_{n-1}(a_0) \cup I_{n-1}(a_{q_{n-1}})$

on a

$$Sf^i(x) \leq -c [m_{n-1}(a_0)]^{-2} < 0,$$

pour $0 \leq i \leq q_n$.

Démonstration: On a, pour $0 \leq i \leq q_n$:

$$\begin{aligned} Sf^i(x) &= \sum_{j=0}^{i-1} Sf(f^j(x)) (Df^j(x))^2 \\ &\leq Sf(x) + c [m_{n-1}(x)]^{-2} \sum_{j=0}^{i-1} [m_{n-1}(f^j(x))]^2 \\ &\leq Sf(x) + c [m_{n-1}(x)]^{-2} \text{Max}_{z \in \mathbb{T}^1} m_{n-1}(z) \end{aligned}$$

d'après le corollaire 3 et le fait que les intervalles $I_{n-1}(f^j(x))$, $0 \leq j < i$, sont d'intérieurs disjoints.

On a $m_{n-1}(x) \geq c^{-1} m_{n-1}(a_0)$ d'après la proposition (pour $x \in I_{n-1}(a_0) \cup I_{n-1}(a_{q_{n-1}})$) et pour n assez grand:

$$Sf(x) \leq \frac{-c}{|x-a_0|^2} \leq \frac{-c}{(m_{n-1}(a_0))^2}$$

On obtient donc l'inégalité désirée en remarquant qu'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Max}_{z \in \mathbb{T}^1} m_{n-1}(z) = 0$ d'après le corollaire 1. □

3. Proposition: On a $m_n(x) \geq c^{-1} m_{n-1}(x)$, pour $x \in K_{n-1}$.

Démonstration: Posons, pour $i \in \mathbb{Z}$:

$$\textcircled{4}_i = [a_{i+q_n}, a_i, a_{i+q_{n-1}}, a_{i+2q_{n-1}}],$$

(on suppose n pair pour fixer les idées)

$$u_i = \frac{a_i - a_{i+q_m}}{a_{i+q_{m-1}} - a_i}$$

On a $\textcircled{A}_i \leq \frac{u_i}{1+u_i} \leq u_i$

et, comme $\frac{a_{i+2q_{m-1}} - a_{i+q_{m-1}}}{a_{i+2q_{m-1}} - a_i} \geq c^{-1}$

$$\textcircled{A}_i \geq c^{-1} \frac{u_i}{1+u_i} \implies u_i \leq \frac{(1+c)\textcircled{A}_i}{1-(1+c)\textcircled{A}_i}$$

(à condition d'avoir $(1+c)\textcircled{A}_i < 1$).

Si $2m$ est l'ordre du point critique a_0 de f , on a donc, pour $0 \leq i < q_m$:

$$\textcircled{A}_{i-q_m} \leq c \textcircled{A}_{i-1} \quad (\text{cf rappels})$$

$$\textcircled{A}_i \leq c \textcircled{A}_{i-q_m} \quad (\text{d'après la proposition, en comparant intervalle par intervalle})$$

$$\textcircled{A}_0 \leq c \textcircled{A}_i \quad (\text{cf rappels})$$

$$\textcircled{A}_{-1} \leq u_{-1} \leq c u_0^{2m+1}$$

On a donc

$$\textcircled{A}_0 \leq c u_0^{2m+1}, \text{ et } u_0 \leq \frac{(1+c)\textcircled{A}_0}{1-(1+c)\textcircled{A}_0} \text{ si } \textcircled{A}_0 \text{ est}$$

assez petit, donc obtient dans tous les cas $\textcircled{A}_0 \geq c^{-1}$, d'où $\textcircled{A}_i \geq c^{-1}$ et $u_i \geq c^{-1}$.

On conclut d'après la proposition de 2. □

4. On va maintenant s'intéresser à la façon dont les points de $K_{n+1} - K_n$ sont disposés par rapport à ceux de K_n . Dans un premier temps, on considère les points adjacents $a_0, a_{q_{n-1}}$ de K_n ;

on suppose n pair pour fixer les idées, de sorte que a_0 précède $a_{q_{n-1}}$ dans K_n . des points de K_{n+1} situés entre a_0 et $a_{q_{n-1}}$, lorsqu'on parcourt cet intervalle de a_0 vers $a_{q_{n-1}}$, sont les points $b_i = f^{iq_n}(a_{q_{n+1}})$, avec $1 \leq i \leq N$, où N est l'entier tel que

$$q_{n+1} = Nq_n + q_{n-1}.$$

On suppose n assez grand pour qu'on ait, d'après le corollaire 4, $Sf^{q_n} < 0$ sur $(a_0, a_{q_{n-1}})$. La fonction $(Df^{q_n})^{-1/2}$ est donc (strictement) convexe sur cet intervalle, et tend vers l'infini en a_0 et $a_{q_{n-1}}$.

Posons $L = a_{q_{n-1}} - a_0$. Si $N=1$, il n'y a pas de points de K_{n+1} entre a_0 et $a_{q_{n-1}}$; si $1 < N \leq N_0$, on aura

$$|b_{i+1} - b_i| \geq c(N_0)^{-1} L, \quad 1 \leq i < N$$

$$|b_1 - a_0| \geq c^{-1} L.$$

On suppose désormais $N > N_0$, N_0 étant déterminé de façon à ce que les estimations que nous allons faire aient un sens (N_0 ne dépendra que des constantes "macroscopiques" de f , pas de l'arithmétique).

Lemme: pour $N > N_0$, on a $\text{Max}_{z \in (a_0, a_{q_{n-1}})} Df^{q_n}(z) \geq 1 + c^{-1}$

Démonstration: Posons $\lambda = \text{Max}_{z \in (a_0, a_{q_{n-1}})} Df^{q_n}(z)$.

On a $b_N - b_{N-1} \geq c^{-1} L$,
d'où $b_{N-j} - b_{N-j-1} \geq c^{-1} \lambda^{-j} L$, $0 \leq j < N$

$$L \geq b_N - b_0 \geq c^{-1} \frac{1 - \lambda^{-N}}{1 - \lambda^{-1}} L$$

d'où le lemme. □

Il existe donc exactement deux points $c_0 < c_1$ dans l'intervalle $(a_0, a_{q_{n-1}})$ où Df^{q_n} vaut 1.

Soit $N' < N$ l'entier tel qu'on ait:

$$b_{N'+1} \leq c_1 < b_{N'+2}$$

Lemme 2. On a $N - N' \leq c$.

Démonstration: En effet, on a

$$b_{i+1} - b_i \leq b_i - b_{i-1},$$

pour $N'+3 \leq i < N$, et aussi $b_N - b_{N-1} \geq c^{-1}L$,

$$b_N - b_{N'+2} \leq L. \quad \square$$

Soit M l'entier tel qu'on ait $b_M \leq c_0 < b_{M+1}$.

Lemme 3. On a $M \geq c^{-1} \log N$, et $N' - M \geq c^{-1} \log N$

Démonstration On a

$$\inf_{0 \leq i \leq N'+1} (b_{i+1} - b_i) \leq c^{-1} L N^{-1}$$

$$\text{et } c^{-1} (b_i - b_{i-1}) \leq b_{i+1} - b_i \leq b_i - b_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq M$$

$$b_i - b_{i-1} \leq b_{i+1} - b_i \leq c (b_i - b_{i-1}), \quad M+1 \leq i \leq N'+1.$$

On a donc

$$\inf_{0 \leq i \leq N'+1} (b_{i+1} - b_i) = b_{M+1} - b_M \text{ ou } b_{M+2} - b_{M+1},$$

$$\text{et dans tous les cas } b_{M+1} - b_M \leq c L N^{-1}$$

$$\text{tandis que } b_1 - b_0 \geq c^{-1}L, \quad b_{N'+2} - b_{N'+1} \geq c^{-1}L$$

(d'après le lemme 2). D'où le lemme 3. □

Lemme 4. On a $Df^{q_n}(b_1) \geq c^{-1}$, $c_0 - b_1 \geq c^{-1}L$ et (10)

$$\underline{Df^{q_n}(b_{N'}) \geq 1 + c^{-1}.}$$

Démonstration : D'après le lemme 3, on a $b_1 < b_2 < c_0$, d'où

$$c_0 - b_1 \geq b_2 - b_1 \geq c^{-1}L$$

$$Df^{q_n}(b_1) \geq \frac{b_2 - b_1}{b_1 - b_0} \geq c^{-1},$$

car Df^{q_n} est croissante sur (a_0, c_0) .

Pour démontrer la dernière inégalité, nous notons c_2 l'unique point où Df^{q_n} atteint son maximum sur $(a_0, a_{q_{n-1}})$ et distinguons deux cas :

1^{er} cas : $b_{N'} \leq c_2$

On a alors $Df^{q_n}(z) \leq Df^{q_n}(b_{N'})$ pour $z \in (a_0, b_{N'})$,

donc $b_{i+1} - b_i \leq Df^{q_n}(b_{N'}) (b_i - b_{i-1})$ pour

$1 \leq i \leq N'$; comme on a $b_{N'+1} - b_{N'} \geq c^{-1}L$ et

$b_{N'+1} - b_0 \leq L$, ceci implique $Df^{q_n}(b_{N'}) \geq 1 + c^{-1}$.

2^e cas : $b_{N'} > c_2$. Comme $(Df^{q_n})^{-1/2}$ est convexe sur

$(a_0, a_{q_{n-1}})$, on a :

$$\frac{1 - (Df^{q_n})^{-1/2}(b_{N'})}{c_1 - b_{N'}} \geq \frac{1 - (Df^{q_n})^{-1/2}(c_2)}{c_1 - c_2}.$$

On a $c_1 - b_{N'} \geq b_{N'+1} - b_{N'} \geq c^{-1}L \geq c^{-1}(c_1 - c_2)$

et $1 - (Df^{q_n})^{-1/2}(c_2) \geq c^{-1}$ d'après le lemme 1 ;

on conclut encore qu'on a $Df^{q_n}(b_{N'}) \geq 1 + c^{-1}$. \square

(11)

Nous allons maintenant comparer f^{q_n} , sur l'intervalle $[b_1, b_{N'}]$, à deux transformations homographiques suivantes :

- la transformation homographique g_0 qui vérifie :

$$g_0(c_0) = f^{q_n}(c_0) ;$$

$$Dg_0(c_0) = 1 = Df^{q_n}(c_0) ;$$

$$Dg_0(b_1) = Df^{q_n}(b_1) ,$$

- la transformation homographique g_1 qui vérifie

$$g_1(c_0) = f^{q_n}(c_0)$$

$$Dg_1(c_0) = 1 = Df^{q_n}(c_1)$$

$$Dg_1(b_{N'}) = Df^{q_n}(b_{N'}) .$$

Comme $(Df^{q_n})^{-1/2}$ est convexe sur l'intervalle $(a_0, a_{q_{n-1}})$, on aura :

- sur l'intervalle $[b_1, c_0]$

$$Dg_1(x) \geq Df^{q_n}(x) \geq Dg_0(x)$$

- sur l'intervalle $[c_0, b_{N'}]$

$$Dg_0(x) \geq Df^{q_n}(x) \geq Dg_1(x)$$

donc

$$g_0(x) \geq f^{q_n}(x) \geq g_1(x)$$

pour tout $x \in [b_1, b_{N'}]$, avec égalité en c_0 .

Remarque: Il est possible que le zéro c_3 de g_0 appartienne à l'intervalle $(c_0, b_{N'}]$; on aura alors seulement

$$g_0(x) \geq f^{q_n}(x) \text{ pour } x \in (c_0, c_3) .$$

5. Un calcul annexe.

5.1 Soient $\delta > 0$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Définissons une transformation homographique $g_{\delta, \theta}$ par :

$$g_{\delta, \theta}(x) = \frac{x + \delta \operatorname{tg} \theta}{1 - \delta^{-1} \operatorname{tg} \theta x}$$

Son pôle ~~vaut~~ est égal à $\delta \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \theta)$. Si on pose $x = \delta \operatorname{tg} u$, on aura $g_{\delta, \theta}(x) = \delta \operatorname{tg}(u + \theta)$.

Sur l'intervalle $(-\infty, \delta \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \theta))$, $g_{\delta, \theta}(x) - x$ est strictement positif, minimal pour $x_0 = -\delta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$, et on a $Dg_{\delta, \theta}^*(x_0) = 1$, $g_{\delta, \theta}(x_0) = -x_0 = \delta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$, $g_{\delta, \theta}(x_0) - x_0 = 2\delta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$. Finalement, on a :

$$[Dg_{\delta, \theta}(x)]^{-1/2} = |\cos \theta - \delta^{-1} \sin \theta x|$$

5.2 Soit g une transformation homographique de $\overline{\mathbb{R}}$ préservant l'orientation et de pôle fini w strictement positif. Supposons que g n'a pas de point fixe (réel) et que l'unique point $x_0 \in (-\infty, w)$ où $g'(x_0) = 1$ vérifie :

$$g(x_0) = -x_0.$$

Alors il existe $\delta > 0$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tels que $g = g_{\delta, \theta}$ - la vérification est immédiate.

5.3 Posons $c'_0 = \frac{1}{2} (c_0 + f^{q_n}(c_0))$ (plus précisément

on choisit un relèvement de f et on pose $c'_0 = \frac{1}{2} (c_0 + f^{q_n}(c_0 - p_n))$

Posons $\tilde{g}_i(x) = g_i(x + c'_0) - c'_0$, pour $i=0, 1$.

Les transformations homographiques \tilde{g}_0, \tilde{g}_1 satisfont aux conditions de 5.2, donc on a:

$$\tilde{g}_i = g_{\delta_i, \theta_i} \text{ pour } i=0, 1.$$

On a alors

$$2 \delta_i \operatorname{tg} \frac{\theta_i}{2} = f^{q_n}(c_0) - c_0, \text{ pour } i=0, 1.$$

En estimant d'autre part la pente de la fonction affine $(D\tilde{g}_i)^{-1/2}$, on a d'autre part:

$$\frac{(Df^{q_n}(b_i))^{-1/2}}{c_0 - b_i} = \delta_0^{-1} \sin \theta_0 > \delta_1^{-1} \sin \theta_1 = \frac{1 - [Df^{q_n}(b_{N'})]^{-1/2}}{b_{N'} - c_0}$$

ce qui donne, d'après le lemme 4

$$cL^{-1} > \delta_0^{-1} \sin \theta_0 > \delta_1^{-1} \sin \theta_1 > c^{-1}L^{-1},$$

On en déduit

$$c^{-1} (f^{q_n}(c_0) - c_0)^{1/2} L^{-1/2} > \theta_0 > \theta_1 > c^{-1} (f^{q_n}(c_0) - c_0)^{1/2} L^{-1/2}$$
$$c (f^{q_n}(c_0) - c_0)^{1/2} L^{1/2} > \delta_1 > \delta_0 > c^{-1} (f^{q_n}(c_0) - c_0)^{1/2} L^{1/2}.$$

6. Nous sommes finalement en mesure d'estimer la disposition des points b_i pour $1 \leq i \leq N'$.

Posons $l = (f^{q_n}(c_0) - c_0)$, $c'_0 - b_1 = \delta_0 \operatorname{tg} u_0 = \delta_1 \operatorname{tg} u_1$, $b_{N'} - c'_0 = \delta_0 \operatorname{tg} v_0 = \delta_1 \operatorname{tg} v_1$ (avec $-\frac{\pi}{2} < u_0, u_1 < 0 < v_0, v_1 < \frac{\pi}{2}$)

Comme $f^{q_n} \geq g_1$ sur $[b_1, b_{N'}]$, on a :

$$v_1 - u_1 \geq (N' - 1) \theta_1,$$

et comme $f^{q_n} \leq g_0$ sur $[b_1, \inf(b_{N'}, \text{pole de } g_0)]$ on a :

$$v_0 - u_0 \leq (N' - 1) \theta_0.$$

Comme on a

$$c^{-1}L \leq c'_0 - b_1 \leq L, \quad c^{-1}L \leq b_{N'} - c'_0 \leq L$$
$$c^{-1}L^{1/2}l^{1/2} \leq \delta_0 \leq \delta_1 \leq cL^{1/2}l^{1/2},$$

on obtient

$$c^{-1} \left(\frac{l}{L}\right)^{1/2} < u_i + \frac{\pi}{2} < c \left(\frac{l}{L}\right)^{1/2}$$

$$c^{-1} \left(\frac{l}{L}\right)^{1/2} < \frac{\pi}{2} - v_i < c \left(\frac{l}{L}\right)^{1/2},$$

En particulier on a $v_0 - u_0 > \frac{\pi}{2}$, donc

$$\theta_0 \geq \frac{c^{-1}}{N}$$

$$\theta_1 \leq \frac{c^{-1}}{N} \quad (\text{d'après l'estimation ci dessus et le lemme 2})$$

et on conclut d'après 5.3 qu'on a :

$$c^{-1}L N^{-2} \leq l = f^{q_n}(c_0) - c_0 \leq cL N^{-2}$$

Soit $N_0 = \frac{\pi}{4\theta_0} \geq c^{-1}N$.

Pour $1 \leq j \leq N_0$, on a :

$$g_1^{j-1}(b_1) \leq b_j = f^{(j-1)q_m}(b_1) \leq g_0^{j-1}(b_1)$$

donc $\frac{cL}{j} \geq c'_0 - b_j \geq \frac{c^{-1}L}{j}$

et $\frac{cL}{j^2} \geq g_0(b_j) - b_j \geq b_{j+1} - b_j \geq g_1(b_j) - b_j \geq \frac{c^{-1}L}{j^2}$.

De même, on a :

$$\frac{cL}{j^2} \geq b_{N'-j+1} - b_{N'-j} \geq \frac{c^{-1}L}{j^2}$$

pour $1 \leq j \leq N_0$.

Finalement, pour $N_0 \leq j \leq N' - N_0$, on a

$$|c'_0 - b_j| \leq \frac{cL}{N}$$

donc $c^{-1}LN^{-2} \leq b_{j+1} - b_j \leq cLN^{-2}$.

En réécrivant de façon légèrement différente ces estimations, compte tenu de ce que $N_0 \geq c^{-1}N$ et $N - N' \leq c$, on obtient :

Proposition: Pour $1 \leq i \leq N$, en posant $\bar{i} = \min(i, N+1-i)$, on a

$$\underline{c^{-1}L\bar{i}^{-2} \leq b_i - b_{i-1} \leq cL\bar{i}^{-2}}$$

(pour $i=1$, on peut aussi remplacer b_0 par a_0).

La disposition des points de K_{n+1} dans les autres intervalles du complémentaire de K_n est en tous points identiques, à ceci près que certains de ces intervalles contiennent N (au lieu de $N-1$) points de K_{n+1} . Plus précisément, si (a_k, a_l) est un intervalle du complémentaire de K_n , et si on note ~~de nouveau~~ $b'_1 < b'_2 < \dots < b'_{\tilde{N}}$ (avec $\tilde{N} = N$ ou $N-1$) les points de K_{n+1} dans cet intervalle, on a, en posant $b'_0 = a_k, b'_{\tilde{N}+1} = a_l$:

$$c^{-1} |a_l - a_k| \bar{j}^{-2} \leq b'_j - b'_{j-1} \leq c |a_l - a_k| \bar{j}^{-2}, \text{ pour } 1 \leq j \leq \tilde{N}+1$$

en posant $\bar{j} = \text{Min}(j, \tilde{N}+2-j)$.

Pour voir ceci, il suffit de remarquer qu'on a :

$$c^{-1} \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_l - a_k} \leq [b'_{j-1}, b'_j, f^{-q_{n-1}}(b'_j), f^{-2q_{n-1}}(b'_j)] \leq c \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_l - a_k}$$

On a aussi

$$c^{-1} \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_l - a_k} \leq [f^{q_n}(b'_{j-1}), f^{q_n}(b'_j), f^{q_n - q_{n-1}}(b'_j), f^{q_n - 2q_{n-1}}(b'_j)] \leq c \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_l - a_k}$$

(comparer intervalle par intervalle)

donc on a

$$c^{-1} \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_l - a_k} \leq [f^k(b'_{j-1}), f^k(b'_j), f^{k - q_{n-1}}(b'_j), f^{k - 2q_{n-1}}(b'_j)] \leq c \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_l - a_k}$$

(car $0 \leq k < q_n$).

Or on a $f^k(b'_{j-1}) = b_{j-1}$ (sauf $f^k(b_0) = f^k(a_k) = a_0$) et $f^k(b'_j) = b_j$, donc l'estimation désirée résulte de la proposition précédente.

7. Soient f, f' deux homéomorphismes analytiques du cercle, préservant l'orientation. On suppose que f et f' ont exactement un point critique, noté a_0 pour f et a'_0 pour f' . On suppose aussi que f et f' ont même nombre de rotation irrationnel, noté α . Comme f et f' sont minimaux, il existe exactement un homéomorphisme du cercle h préservant l'orientation et vérifiant:

$$h(a_0) = a'_0$$

$$h \circ f = f' \circ h.$$

THEOREME. L'homéomorphisme h est quasimétrique.

Démonstration. Notons (p_n/q_n) la suite des réduites de α ; posons aussi, pour $x \in \mathbb{T}^1$, $j \geq 0$; $n \geq 0$:

$$a_j = f^{-j}(a_0)$$

$$a'_j = f'^{-j}(a'_0)$$

$$m_n(x) = |f^{q_n}(x) - x|$$

$$m'_n(x) = |f'^{q_n}(x) - x|$$

$$K_n = \{a_i, 0 \leq i < q_n\}$$

$$K'_n = \{a'_i, 0 \leq i < q_n\}.$$

Il suffit de montrer qu'il existe une constante $c_0 > 1$ telle qu'on ait, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$:

$$h(x) - h(x-t) \leq c_0 (h(x+ct) - h(x))$$

$$h(x+t) - h(x) \leq c_0 (h(x) - h(x-ct)).$$

(18)

Nous allons seulement vérifier la première inégalité, la seconde étant parfaitement similaire.

Soient donc $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ et $c_0 > 1$ assez grand (indépendamment de x et t). Soit n le plus petit entier tel que l'intervalle $[x-t, x]$ contient (au moins) un point de K_n . Distinguons 2 cas :

1^{er} cas : l'intervalle $[x-t, x]$ contient exactement un point, noté y de K_n .

Soit alors $m \geq n$ le plus petit entier tel que $K_{m+1} \cap [x-t, x]$ contient un point ~~de~~ distinct de y .

Notons z un point de $K_{m+1} \cap [x-t, x]$ précédant ou suivant y dans K_{m+1} . Notons $z_0 < y < z_1 < z_2$ les quatre points consécutifs de K_m autour de y . On a

$$|z - y| \leq t$$

$$z_0 < x-t \leq y \leq x < z_1 < z_2,$$

et $|z_0 - y| \leq ct$

$$|z_1 - y| \leq ct$$

$$|z_2 - z_1| \leq ct$$

donc $[z_1, z_2] \subset [x, x+c_0t]$, si c_0 est assez grand.

Si y', z', z'_0, z'_1, z'_2 sont les points correspondants de K'_{m+1} on a alors

$$z'_0 < h(x-t) < y' < h(x) < z'_1 < z'_2 < h(x+c_0t),$$

d'où $h(x) - h(x-t)$

$$h(x) - h(x-t) < z'_1 - z'_0 \leq c(z'_2 - z'_1) \leq c(h(x+c_0t) - h(x)).$$

2^e cas: L'intervalle $[x-t, x]$ contient au moins deux points de K_n .

Soit y le point de K_{n-1} immédiatement supérieur à x .

a) Si y appartient à $[x, x+c_0t]$ et c_0 est assez grand, il résulte de la proposition de 3 que le point z précédent ou le point suivant y dans K_n appartient encore à $[x, x+c_0t]$. En notant y_0 le point précédent y dans K_{n-1} on a donc ~~en notant y'~~

$$y_0 < x-t < x < y, \\ |y-z| < c_0t$$

et en notant y'_0, y', z' les points correspondants:

$$\cancel{h(y_0)} < \cancel{h(x-t)} < h(x) < \cancel{h(y')} \\ \cancel{h(z')} < \cancel{h(x)} < h(y') \approx c^{-1}|y'-y'_0|$$

donc $h(x+c_0t) - h(x) \geq |y'-z'| \geq c^{-1}|y'-y'_0| \geq c^{-1}(h(x)-h(x-t))$

b) Il reste finalement le cas où $y > x+c_0t$. Notons encore y_0 le point précédent y dans K_{n-1} , et notons $b_1 < \dots < b_N$ les points de K_n dans (y_0, y) en posant $b_0 = y_0$ et $b_{N+1} = y$, $L = |y - y_0|$.

Soient j_0, j_1, j_2 des entiers tels que

$$b_{j_0} < x-t \leq b_{j_0+1} \\ b_{j_1} < x \leq b_{j_1+1} \\ b_{j_2} < x+c_0t \leq b_{j_2+1}$$

On a $0 \leq j_0 < j_1 < j_2 \leq N$, et $j_1 \geq j_0+2$, ~~$j_1 \geq j_0+1$~~

En posant $a(j) = (\inf (j, N+2-j))^{-2}$ pour $1 \leq j \leq N+1$, on a d'après les estimations du §6:

$$t \geq b_{j_1} - b_{j_0+1} \geq c^{-1} L \sum_{i=j_0+2}^{j_1} a(i)$$

$$c_0 t \leq b_{j_2+1} - b_{j_1} \leq c L \sum_{i=j_1+1}^{j_2+1} a(i)$$

$$h(x) - h(x-t) \leq b'_{j_2+1} - b'_{j_0}$$

$$\leq c L' \sum_{i=j_0+1}^{j_1+1} a(i)$$

$$\leq c L' \sum_{i=j_0+2}^{j_1} a(i) \leq c \frac{L'}{L} t$$

et

$$h(x+ct) - h(x) \geq c^{-1} L' \sum_{i=j_1+2}^{j_2} a(i)$$

$$\geq c^{-1} L' \sum_{i=j_1+1}^{j_2+1} a(i) \geq c^{-1} \frac{L'}{L} t$$

car (à vrai dire, il faut encore éliminer le cas où $j_2 = j_1+1$; c'est incompatible, pour c_0 assez grand, avec le fait que $[x-t, x]$ contienne 2 points de K_n)

(On a noté b'_j, L' les grandeurs correspondantes pour f').



8. Extension quasiconforme de la conjugaison à une rotation lorsque le nombre de rotation est de type constant.

8.1 Soit f , comme précédemment, un homéomorphisme analytique du cercle, préservant l'orientation, et ayant exactement 1 point critique. Notons α le nombre de rotation de f , (p_n/q_n) la suite des réduites de α .

On a, pour $n \geq 0$:

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}, \quad \text{avec } a_{n+1} \geq 1.$$

Supposons que α est de type constant, c'est à dire qu'on a:

$$\sup_{n \geq 0} a_{n+1} < +\infty,$$

(ou encore $\inf_{n \geq 0} q_n |q_n \alpha - p_n| > 0$).

Posons $N = \sup_{n \geq 0} a_{n+1}$.

Rappelons que f est minimal, donc topologiquement conjugué à la rotation R_α . De plus, (cf. Herman, d'après Świątek), la conjugaison est un homéomorphisme quasimétrique du cercle.

Plus précisément, notons h l'unique homéomorphisme de $\mathbb{D}^0(\mathbb{R})$ qui envoie 0 sur le relèvement a_0 du point critique de f et vérifie $h \circ R_\alpha = f \circ h$.

L'homéomorphisme h ^{de \mathbb{R}} est quasimétrique et (22)
 commute avec la translation : $x \mapsto x+1$. Il existe
 donc un homéomorphisme quasiconforme H
 du demi-plan supérieur (fermé) $\overline{\mathbb{H}} = \{z, \text{Im}z \geq 0\}$
 qui commute avec la translation : $z \mapsto z+1$, et dont
 la restriction au bord \mathbb{R} de $\overline{\mathbb{H}}$ soit égale à h .

Posons.
$$K = \sup_{x \in \mathbb{H}} \frac{\max_{\|v\|=1} \|DH_x \cdot v\|}{\min_{\|v\|=1} \|DH_x \cdot v\|}$$

Nous allons montrer que :

Proposition: On peut choisir l'extension quasiconforme
 H de la conjugaison h de façon à avoir :

$$K \leq c [\log(1+N)]^2$$

où c est une constante ne dépendant que des caractéris-
 tiques "macroscopiques" de f , en particulier c ne
 change pas lorsqu'on remplace f par $R_\theta \circ f$, $\theta \in \mathbb{R}$.

8.2 Construction de H .

Posons, pour $n \geq 0$:

$$\tilde{K}_n = \{ f^{-j}(a_0) + k, \quad 0 \leq j < q_n, \quad k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\tilde{K}'_n = \{ k - j\alpha, \quad 0 \leq j < q_n, \quad k \in \mathbb{Z} \}.$$

L'homéomorphisme h envoie le point $k - j\alpha$

(23)

Sur le point $f^{-j}(a_0) + k$, donc \tilde{K}'_n sur \tilde{K}_n .

Soit $n \geq 0$, et $x \in \tilde{K}_n$; notons $d_n(x)$ la somme des distances de x aux points de \tilde{K}_n précédant et suivant x ; notons $j_n(x)$ le point de \mathbb{H}^1 égal à $x + i d_n(x)$.

Notons de façon analogue, pour un point $x' \in \tilde{K}'_n$, par $d'_n(x')$ la somme des distances de x' aux points de \tilde{K}'_n précédant et suivant x' dans \tilde{K}'_n , et posons $j'_n(x') = x' + i d'_n(x')$. Notons x^+ (resp x'^+) le point suivant x (resp x') dans \tilde{K}_n (resp \tilde{K}'_n). Soit M le nombre de points de \tilde{K}_{n+1} dans l'intervalle (x^-, x^+) (ou de \tilde{K}'_{n+1} dans l'intervalle (x'^-, x'^+)). On a $0 \leq M \leq N$.

Notons aussi x^- (resp x'^-) le point précédant x (resp x') dans \tilde{K}_n (resp \tilde{K}'_n).

Notons $x_1 < \dots < x_M$ les points de \tilde{K}_{n+1} dans l'intervalle (x^-, x^+) , $x'_1 < \dots < x'_M$ les points de \tilde{K}'_{n+1} dans l'intervalle (x'^-, x'^+) . Notons enfin x^{++} (resp x'^{++}) le point suivant x^+ (resp x'^+) dans \tilde{K}_n .

Soit $P_n(x)$ la ligne polygonale fermée joignant les points $j_n(x), j_{n+1}(x), j_{n+1}(x_1), \dots, j_{n+1}(x_M), j_{n+1}(x^+), j_n(x^+), j_n(x)$. Notons de même $P'_n(x')$ la ligne polygonale joignant $j'_n(x'), j'_{n+1}(x'), j'_{n+1}(x'_1), \dots, j'_{n+1}(x'_M), j'_{n+1}(x'^+), j'_n(x'^+), j'_n(x')$.

Il est facile de voir que $P_n(x)$ et $P'_n(x')$ sont des courbes de Jordan (i.e. n'ont pas de self-intersection), sauf dans le cas où $M = 0$ et $\tilde{K}_{n+1} = \tilde{K}_n$ n'a.

~~En effet~~ pas de points dans (x^-, x^{++}) , auquel cas P_n est le segment $[j_n(x), j_n(x^+)]$, parcouru deux fois.

(En effet, on a $j_{n+1}(x_0) < j_n(x)$, $j_{n+1}(x_0) < j_n(x^+)$ pour $1 \leq l \leq M$, et $j_{n+1}(x) \leq j_n(x)$, $j_{n+1}(x^+) \leq j_n(x^+)$ avec double égalité uniquement dans le cas ci dessus)

Soit L_n la ligne polygonale joignant des points $j_n(x)$, lorsque x décrit en croissant \tilde{K}_n . Soit de même L'_n la ligne joignant les points $j'_n(x')$, lorsque x' décrit en croissant \tilde{K}'_n .

La ligne L_n est située au dessus de L_{n+1} (avec des portions communes éventuelles lorsque $P_{n+1} \neq \emptyset = Q_n + Q_{n-1}$) de même L'_n est située au dessus de L'_{n+1} .

La bande fermée située entre L_n et L_{n+1} est l'union des polygones $Q_n(x)$ délimités par les $P_n(x)$, pour x décrivant \tilde{K}_n . De même la bande entre L'_n et L'_{n+1} est union des polygones $Q'_n(x')$ délimités par les $P'_n(x')$, lorsque x' décrit \tilde{K}'_n .

Soit $x \in \tilde{K}_n$, $x' = h^{-1}(x) \in \tilde{K}'_n$. Notons w l'application de $P'_n(x')$ sur $P_n(x)$ qui ~~est~~ envoie $j'_n(x')$ sur $j_n(x)$, $j'_{n+1}(x')$ sur $j_{n+1}(x)$, $j'_{n+1}(x'_i)$ sur $j_{n+1}(x_i)$ (pour $1 \leq i \leq M$), $j'_{n+1}(x'^+)$ sur $j_{n+1}(x^+)$, $j'_n(x'^+)$ sur $j_n(x^+)$, et est affine ~~linéaire~~ sur les segments joignant ces points.

Nous allons montrer qu'il existe un homéomorphisme quasiconforme W de $Q'_n(x')$ sur $Q_n(x)$,

dont la restriction à $P'_n(x')$ est égale à $P_n(x)$, ⁽²⁵⁾
 et dont le rapport de dilatation maximal est
 $\leq c(\log(M+2))^2$.

Or on a :

$$\begin{aligned} \bullet \{z, 0 < \text{Im}z \leq 2\} &= \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{x \in \tilde{K}'_n} Q_n(x) \\ &= \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{x' \in \tilde{K}'_n} Q'_n(x'), \end{aligned}$$

$$\bullet L_0 = \{z, \text{Im}z = 2\} = L'_0$$

• Pour $k \in \mathbb{Z} = \tilde{K}'_0$, le bord supérieur de $Q'_0(k)$ est le segment $[k+2i, k+1+2i]$ et l'application w définie ci-dessus envoie de manière affine ce segment sur le segment $[a_0+k+2i, a_0+k+1+2i]$

• Si $y \in \mathbb{H}$ appartient à deux polygones $Q'_n(x')$ et $Q'_m(y')$ ($x' \in \tilde{K}'_n, y' \in \tilde{K}'_m$) les images de y par les applications w associées à ces deux polygones sont égales.

Done on peut recoller les applications w mentionnées ci-dessus en un homéomorphisme quasiconforme de $\{z, 0 < \text{Im}z \leq 2\}$, ~~sur $\{z, 0 < \text{Im}z \leq 2\}$~~ qui s'étend en un homéomorphisme (quasiconforme) de $\{z, 0 \leq \text{Im}z \leq 2\}$ dont la restriction à \mathbb{R} est égale à h . Finalement, en posant $H(z) = z + a_0$ pour $\text{Im}z \geq 2$, on obtient une extension quasiconforme

de la ayant les propriétés désirées.

8.3 Construction de W

Lorsque $M \leq c'$, la construction de w de rapport de dilatation maximal $\leq c$, ne présente pas de problèmes : on peut par exemple choisir l'une des applications qui coïncide avec w sur le bord et est affine sur chacun des triangles :

- $j'_n(x), j'_n(x'+), j'_{n+1}(x')$
- $j'_n(x'+), j'_{n+1}(x'), j'_{n+1}(x_1)$
- $j'_n(x'+), j'_{n+1}(x_1), j'_{n+1}(x_2)$
- \vdots
- $j'_n(x'+), j'_{n+1}(x_{M-1}), j'_{n+1}(x_M)$
- $j'_n(x'+), j'_{n+1}(x_M), j'_{n+1}(x'+)$.

Ces triangles et leurs images ayant des angles minorés, l'attention sur le rapport de dilatation maximal ^(de w) en résulte.

Nous supposons désormais que $M \geq c'$ est assez grand.

Nous allons d'abord nous ramener pour $Q_n(x)$ et $Q'_n(x')$, à des modèles standards qui s'en déduisent par des ~~applicat~~ homéomorphismes quasiconformes ~~qui se~~ dont le rapport de dilatation maximal est borné (indépendamment de M).

C'est ainsi qu'il existe un homéomorphisme quasiconforme w'_\pm , de rapport de dilatation maximal borné indépendamment de M , possédant les propriétés

- les suivantes :

(27)

$$\bullet W'_1(Q'_n(x')) = \overline{\mathbb{D}}, \quad W'_1(P'_n(x')) = S^1$$

$$\bullet W'_1(j'_n(x')) = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$$

$$W'_1(j'_{n+1}(x')) = e^{-i\pi/4}$$

$$W'_1(j'_{n+1}(x'_j)) = e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{2}j} \\ = e^{i(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2(M+1)}j)}$$

pour $1 \leq j \leq M$

$$\bullet W'_1(j'_{n+1}(x'^+)) = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$\bullet W'_1(j'_n(x^4)) = e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

• L'application $\log W'_1$ est affine sur chacun des cotés de $P'_n(x')$.

De même, il existe un homéomorphisme quasiconforme W_1 , de rapport de dilatation maximal borné indépendamment de M , qui envoie $\overline{\mathbb{D}}$ sur S^1 et vérifie :

$$\bullet W_1(Q_n(x)) = \overline{\mathbb{D}}, \quad W_1(P_n(x)) = S^1$$

$$\bullet W_1(j_n(x)) = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$$

$$W_1(j_{n+1}(x)) = e^{-i\pi/4}$$

$$W_1(j_{n+1}(x^+)) = e^{i\pi/4}$$

$$W_1(j_n(x^+)) = e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

• $\log W_1$ est affine sur chacun des cotés $[j_{n+1}(x), j_n(x)]$, $[j_{n+1}(x^+), j_n(x^+)]$, $[j_n(x), j_n(x^+)]$ de $P_n(x)$.

• il existe un élément β_0 de $\text{Möb}(\overline{\mathbb{D}})$

fixant 1 et $e^{-i\pi/4}$, satisfaisant

$$cM \geq D\beta_0(e^{-i\pi/4}) \geq c^{-1}M$$

$$cM^{-1} \geq D\beta_0(1) \geq c^{-1}M^{-1}$$

$$W_1(j_{n+1}(x_j)) = \beta_0(W'_1(j'_{n+1}(x'_j)))$$

pour $1 \leq j \leq \frac{M+1}{2}$

~~W_1~~ ~~W'_1~~ ~~$\equiv \beta_0$~~ sur l'arc de cercle $[e^{-i\pi/4}, 1]$.

$$W_1 \text{ ou } W'_1 \equiv \beta_0$$

il existe un élément β_1 de $\text{Möb}(\mathbb{D})$ fixant 1 et $e^{i\pi/4}$ et satisfaisant

$$cM \geq D\beta_1(e^{i\pi/4}) \geq c^{-1}M$$

$$cM^{-1} \geq D\beta_1(1) \geq c^{-1}M^{-1}$$

$$W_2(j_{n+1}(x_j)) = \beta_0(W'_2(j'_{n+1}(x'_j)))$$

pour $\frac{M+1}{2} \leq j \leq M$

$$W_2 \text{ ou } W'_2 \equiv \beta_1 \text{ sur l'arc de cercle } [1, e^{i\pi/4}]$$

l'existence de W_1 et W'_1 , avec des rapports de dilatation maximaux indépendants de M , se vérifie aisément, à partir des estimations du n° 6.

En écrivant maintenant l'homéomorphisme W cherché sous la forme $W = W'_1 W_0 W_1$

Nous sommes ramenés à montrer qu'il existe une homéomorphisme quasiconforme w_0 du disque dans lui-même, de rapport de dilatation maximal $\leq C(\log(2+M))$ et qui coïncide sur S^1 avec

- l'identité sur $[e^{i\pi/4}, e^{-i\pi/4}]$
- β_0 sur $[e^{-i\pi/4}, 1]$
- β_4 sur $[1, e^{i\pi/4}]$

Cela résulte aisément du lemme suivant, qui se déduit immédiatement d'une construction due à Strebel.

Lemme: Soient ~~n~~ $L \geq 2$ et $x_1, \dots, x_L = x_0$ des points distincts de S^1 rencontrés dans cet ordre lorsqu'on parcourt S^1 dans le sens positif. Pour $1 \leq i \leq L$, soit β_i un élément de $\text{Mob}(\mathbb{D})$ qui fixe x_{i-1} et x_i . Soit β l'homéomorphisme de S^1 qui coïncide avec β_i sur $[x_{i-1}, x_i]$. Posons $K = \max_{1 \leq i \leq L} (\max(D_{\beta_i}(x_{i-1}), D_{\beta_i}(x_i)))$. Il existe alors un homéomorphisme quasiconforme B de \mathbb{D} qui coïncide avec β sur S^1 et dont le rapport de dilatation maximal est ~~$\leq C(\log k)$~~ $\leq C(1 + (\log k)^2)$.

Démonstration: Soit l_i la géodésique hyperbolique joignant x_{i-1} à x_i , et U_i le domaine fermé délimité par l'arc de cercle $[x_{i-1}, x_i]$ et l_i .

Soit w_i une homographie envoyant x_{i-1} sur 0 , x_i sur ∞ et \mathbb{D} sur $\overline{\mathbb{H}}$. L'image par w_i de U_i est le quadrant $\{z, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, et $w_i \beta_i w_i^{-1}$ est une homothétie $x \mapsto \lambda_i x$, avec $k^{-1} \leq \lambda_i \leq k$.

Nous prolongeons β_i en un homéomorphisme quasiconforme B_i de U_i , égal à l'identité sur l_i , et dont le rapport de ~~quasiconfor~~ dilatation maximal est $\leq c(1 + |\log \lambda_i|^2)$ de la façon suivante:

$$w_i (B_i(z)) = B'_i(w_i(z)), \quad z \in U_i$$

avec

$$B'_i(\rho e^{\frac{i\pi}{2}t}) = \rho e^{\frac{i\pi}{2}t} e^{(1-t)\log \lambda_i}$$

pour $\rho \geq 0, 0 \leq t \leq 1$.

Finalement, nous définissons B comme étant égal à B_i sur U_i pour $1 \leq i \leq L$, et coïncident avec l'identité sur $\mathbb{D} - \bigcup_{1 \leq i \leq L} U_i$.

