

# STRUCTURE DES ORBITES DES HOMÉOMORPHISMES ANALYTIQUES POSSÉDANT UN POINT CRITIQUE

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

1. —

Soit  $f$  un homéomorphisme analytique du cercle, préservant l'orientation, dont le nombre de rotation  $\alpha$  est irrationnel. On suppose que  $f$  a exactement un point critique  $a_0$ .

**Notations :**

- $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  sera la suite des réduites de  $\alpha$ ;
- $a_i = f^{-i}(a_0)$ , pour  $i \in \mathbb{Z}$ ;
- pour  $a < b < c < d < a + 1$ , on pose  $[a, b, c, d] = \frac{b-a}{c-a} \frac{d-c}{d-b}$ ;
- pour  $n \geq 0$ , on pose

$$m_n(x) = |f^{q_n}(x) - x|,$$

$$I_n(x) = \begin{cases} [x, f^{q_n}(x)] & \text{si } n \text{ pair,} \\ [f^{q_n}(x), x] & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

$$K_n = \{a_i, 0 \leq i < q_n\}.$$

**Convention :** Dans les estimations qu'on fera par la suite, les constantes notées  $c$  de façon générique ne dépendront que de grandeurs macroscopiques liées à  $f$  (telles que l'ordre du point critique, la variation de  $\log Df$  sur le complémentaire d'un voisinage du point critique ...) mais pas de l'arithmétique.

**Rappels.**

- (1) Lorsqu'on parcourt  $\mathbb{T}^1$  dans le sens positif, pour  $n$  pair (resp. impair), le point de  $K_n$  suivant (resp. précédant) un point  $a_i$  ( $0 \leq i < q_n$ ) est  $a_j$  avec

$$j = i + q_{n-1} \quad \text{si } 0 \leq i < q_n - q_{n-1}$$

$$j = i + q_{n-1} - q_n \quad \text{si } q_n - q_{n-1} \leq i < q_n.$$

- (2) Les intervalles  $I(f^j(x))$ ,  $0 \leq j < q_{n+1}$  sont d'intérieurs disjoints.

- (3) On a  $\bigcup_{0 \leq j < q_{n+1} + q_n} I(f^j(x)) = \mathbb{T}^1$ .

- (4) Soient  $a < b < c < d < a + 1$ , et  $N > 0$ . On a :

$$[f^N(a), f^N(b), f^N(c), f^N(d)] \leq c^m [a, b, c, d],$$

où  $m = \max_{x \in \mathbb{T}^1} \#\{j, 0 \leq j < N, x \in (f^j(a), f^j(d))\}$ .

---

0. Le manuscrit original a été converti en 'tex' par Carlos Matheus. A quelques modifications mineures près, cet article reste fidèle au texte original.

- (5) Soient  $a < b < c < d < a + 1$ , et  $N > 0$ . Si l'intervalle  $(a, d)$  ne contient aucun des points  $a_j$ ,  $0 \leq j < N$ , et si on a  $Sf^N \leq 0$  sur  $(a, d)$ , alors

$$[f^N(a), f^N(b), f^N(c), f^N(d)] \leq [a, b, c, d].$$

On rappelle que  $Sf$  désigne la dérivée Schwarzienne de  $f$  :

$$\begin{aligned} Sf &= D^2 \log Df - \frac{1}{2}(D \log Df)^2 \\ &= (D^3 f Df - \frac{3}{2}(D^2 f)^2) Df^{-2} \\ &= -2(Df)^{-1/2} D^2 (Df^{-1/2}). \end{aligned}$$

2. —

Fixons  $n \geq 0$ , pair pour fixer les idées. Posons  $q = q_n$ ,  $m = m_n$ ,  $I(x) = I_n(x)$  pour  $x \in \mathbb{T}^1$  et

$$\Delta(x) = [f^{-q}(x), x, f^q(x), f^{2q}(x)], \quad \text{pour } x \in \mathbb{T}^1.$$

**Lemme 1.** Pour  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $z \in I(x)$ , on a

$$m(x) \geq c^{-1} \inf(m(z), m(f^{-q}(z)))$$

*Démonstration.* Posons  $\theta = \frac{m(f^{-q}(z))}{m(z)}$ ,  $\varepsilon = \frac{m(x)}{m(z)}$ ; il s'agit de démontrer qu'on a

$$\varepsilon > c^{-1} \inf(\theta, 1).$$

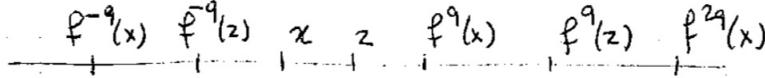
Or on a

$$\Delta(x) = \frac{m(f^q(x))}{m(x) + m(f^q(x))} \frac{m(f^{-q}(x))}{m(x) + m(f^{-q}(x))}$$

et

$$m(f^q(x)) \geq f^q(z) - f^q(x) \geq (1 - \varepsilon)m(z),$$

$$m(f^{-q}(x)) \geq x - f^{-q}(z) \geq (\theta - \varepsilon)m(z),$$



donc

$$\Delta(x) \geq \frac{(1 - \varepsilon)(\theta - \varepsilon)}{\theta};$$

d'autre part

$$\Delta(f^{-q}(x)) \leq \frac{m(x)}{m(x) + m(f^{-q}(x))} \leq \frac{\varepsilon}{\theta},$$

d'où  $(1 - \varepsilon)(\theta - \varepsilon) \leq c\varepsilon$  (car  $\Delta(x) \leq c\Delta(f^{-q}(x))$ ) ce qui donne le lemme.  $\square$

**Proposition 1.** Pour  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $z \in I(x)$ , on a

$$c^{-1}m(x) \leq m(z) \leq cm(x)$$

*Démonstration.* D'après le lemme, il suffit de montrer qu'on a, pour  $z \in \mathbb{T}^1$ ,

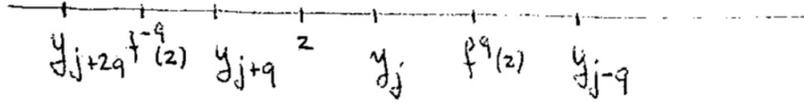
$$c^{-1}m(z) \leq m(f^{-q}(z)) \leq cm(z)$$

Soit  $y$  un point où  $m$  atteint son minimum ; posons  $y_j = f^{-j}(y)$  pour  $j \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $z \in \mathbb{T}^1$  ; soit  $j$  le plus petit entier positif ou nul tel que  $y_j \in I(z)$ .

On a  $j \leq q_{n+1} + q$  (cf. rappels) et  $\Delta(y) \geq 1/4$ , donc

$$\Delta(y_j) \geq c^{-1}, \Delta(y_{j+q}) \geq c^{-1}, \Delta(y_{j+2q}) \geq c^{-1}.$$



On a

$$\left. \begin{array}{l} m(y_{j+q}) \geq c^{-1}m(y_j) \quad \text{car } \Delta(y_j) \geq c^{-1} \\ m(y_{j+2q}) \geq c^{-1}m(y_{j+q}) \\ m(y_j) \geq c^{-1}m(y_{j+q}) \end{array} \right\} \quad \text{car } \Delta(y_{j+q}) \geq c^{-1}$$

$$m(y_{j+q}) \geq c^{-1}m(y_{j+2q}) \quad \text{car } \Delta(y_{j+2q}) \geq c^{-1}$$

On a donc

$$\begin{aligned} m(z) &\leq m(y_{j+q}) + m(y_j) \leq cm(y_j) \\ m(f^{-q}(z)) &\leq m(y_{j+2q}) + m(y_{j+q}) \leq cm(y_j) \end{aligned}$$

et d'après le lemme

$$\begin{aligned} m(f^{-q}(z)) &\geq c^{-1} \inf(m(y_{j+2q}), m(y_{j+q})) \geq c^{-1}m(y_j) \\ m(z) &\geq c^{-1} \inf(m(y_{j+q}), m(y_j)) \geq c^{-1}m(y_j). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.**  $f$  est minimal.

*Démonstration.* Si  $f$  était un contre-exemple de Denjoy, de Cantor invariant  $L$ , on aurait, pour l'extrémité droite  $z$  d'un intervalle du complémentaire de  $L$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{2n}(z) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_{2n}(f^{-q_{2n}}(z)) > 0.$$

□

**Corollaire 3.** Il existe  $c > 0$  tel qu'on ait

$$Df^{q_n}(x) < c, \quad \forall x \in \mathbb{T}^1, n \geq 0.$$

*Démonstration.* Posons, pour  $y \in I(f^{-q_n}(x))$ ,

$$\Delta(y, x) = [y, x, f^{q_n}(x), f^{2q_n}(x)]$$

(on suppose  $n$  pair pour fixer les idées).

On a

$$c^{-1} \frac{x-y}{m_n(x)} \leq \Delta(y, x) \leq c \frac{x-y}{m_n(x)}, \quad \text{d'après la proposition}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta(f^{q_n}(y), f^{q_n}(x)) &\leq c\Delta(y, x) \\ c^{-1}m_n(x) &\leq m_n(f^{q_n}(x)) \leq cm_n(x) \end{aligned}$$

d'après la proposition. On a donc

$$f^{q_n}(x) - f^{q_n}(y) \leq c(x - y)$$

et le corollaire. □

**Corollaire 4.** Pour  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $n \geq 0$ ,  $0 \leq i < q_{n+1}$ , on a :

$$Df^i(x) \leq c \frac{m_n(f^i(x))}{m_n(x)}$$

*Démonstration.* En effet, on a (avec les notations du corollaire 2)

$$\begin{aligned} \Delta(f^i(y), f^i(x)) &\leq c\Delta(y, x) \\ f^i(x) - f^i(y) &\leq c\Delta(f^i(y), f^i(x))m_n(f^i(x)) \\ \Delta(y, x) &\leq c \frac{x - y}{m_n(x)} \end{aligned}$$

□

**Corollaire 5.** Pour  $n$  assez grand et  $x \in I_{n-1}(a_0) \cup I_{n-1}(a_{q_{n-1}})$ , on a

$$Sf^i(x) \leq -c[m_{n-1}(a_0)]^{-2} < 0,$$

pour  $1 \leq i \leq q_n$ .

*Démonstration.* On a, pour  $1 \leq i \leq q_n$  :

$$\begin{aligned} Sf^i(x) &= \sum_{j=0}^{i-1} Sf(f^j(x))(Df^j(x))^2 \\ &\leq Sf(x) + c[m_{n-1}(x)]^{-2} \sum_{j=1}^{i-1} [m_{n-1}(f^j(x))]^2 \\ &\leq Sf(x) + c[m_{n-1}(x)]^{-2} \max_{z \in \mathbb{T}^1} m_{n-1}(z) \end{aligned}$$

d'après le corollaire 4 et le fait que les intervalles  $I_{n-1}(f^j(x))$ ,  $0 \leq j < i$ , sont d'intérieurs disjoints.

On a  $m_{n-1}(x) \geq c^{-1}m_{n-1}(a_0)$  d'après la proposition (pour  $x \in I_{n-1}(a_0) \cup I_{n-1}(a_{q_{n-1}})$ ) et pour  $n$  assez grand :

$$Sf(x) \leq \frac{-c}{|x - a_0|^2} \leq \frac{-c}{(m_{n-1}(a_0))^2}$$

On obtient donc l'inégalité désirée en remarquant qu'on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{z \in \mathbb{T}^1} m_{n-1}(z) = 0$  d'après le corollaire 2. □

3. —

**Proposition 6.** On a  $m_n(x) \geq c^{-1}m_{n-1}(x)$ , pour  $x \in K_n$ .

*Démonstration.* Posons, pour  $i \in \mathbb{Z}$  :

$$\Theta_i = [a_{i+q_n}, a_i, a_{i+q_{n-1}}, a_{i+2q_{n-1}}],$$

(on suppose  $n$  pair pour fixer les idées)

$$u_i = \frac{a_i - a_{i+q_n}}{a_{i+q_{n-1}} - a_i}$$

On a  $\Theta_i \leq \frac{u_i}{1+u_i} \leq u_i$  et, comme  $\frac{a_i+2q_{n-1}-a_i+q_{n-1}}{a_i+2q_{n-1}-a_i} \geq c^{-1}$  :

$$\Theta_i \geq c^{-1} \frac{u_i}{1+u_i} \Rightarrow u_i \leq \frac{(1+c)\Theta_i}{1-(1+c)\Theta_i}$$

(à condition d'avoir  $(1+c)\Theta_i < 1$ ).

Si  $2m$  est l'ordre du point critique  $a_0$  de  $f$ , on a donc, pour  $0 \leq i < q_n$  :

$$\Theta_{i-q_n} \leq c\Theta_{-1} \quad (\text{cf. rappels})$$

$\Theta_i \leq c\Theta_{i-q_n}$  (d'après la proposition, en comparant intervalle par intervalle)

$$\Theta_0 \leq c\Theta_i \quad (\text{cf. rappels})$$

$$\Theta_{-1} \leq u_{-1} \leq cu_0^{2m+1};$$

On a donc  $\Theta_0 \leq cu_0^{2m+1}$ , et  $u_0 \leq \frac{(1+c)\Theta_0}{1-(1+c)\Theta_0}$  si  $\Theta_0$  est assez petit, donc obtient dans tous les cas  $\Theta_0 \geq c^{-1}$ , d'où  $\Theta_i \geq c^{-1}$  et  $u_i \geq c^{-1}$ .

On conclut d'après la proposition 1.  $\square$

#### 4. —

On va maintenant s'intéresser à la façon dont les points de  $K_{n+1} - K_n$  sont disposés par rapport à ceux de  $K_n$ . Dans un premier temps, on considère les points adjacents  $a_0, a_{q_{n-1}}$  de  $K_n$ ; on suppose  $n$  pair pour fixer les idées, de sorte que  $a_0$  précède  $a_{q_{n-1}}$  dans  $K_n$ . Les points de  $K_{n+1}$  situés entre  $a_0$  et  $a_{q_{n-1}}$ , lorsqu'on parcourt cet intervalle de  $a_0$  vers  $a_{q_{n-1}}$ , sont les points  $b_i = f^{iq_n}(a_{q_{n+1}})$ , avec  $1 \leq i < N$ , où  $N$  est l'entier tel que

$$q_{n+1} = Nq_n + q_{n-1}.$$

On suppose  $n$  assez grand pour qu'on ait, d'après le Corollaire 5,  $Sf^{q_n} < 0$  sur  $(a_0, a_{q_{n-1}})$ . La fonction  $(Df^{q_n})^{-1/2}$  est donc (strictement) convexe sur cet intervalle, et tend vers l'infini en  $a_0$  et  $a_{q_{n-1}}$ .

Posons  $L = a_{q_{n-1}} - a_0$ . Si  $N = 1$ , il n'y a pas de points de  $K_{n+1}$  entre  $a_0$  et  $a_{q_{n-1}}$ ; si  $1 < N \leq N_0$ , on aura

$$|b_{i+1} - b_i| \geq c(N_0)^{-1}L, \quad 1 \leq i < N$$

$$|b_1 - a_0| \geq c^{-1}L.$$

On suppose désormais  $N > N_0$ ,  $N_0$  étant déterminé de façon à ce que les estimations que nous allons faire aient un sens ( $N_0$  ne dépendra que des constantes "macroscopiques" de  $f$ , pas de l'arithmétique).

**Lemme 2.** Pour  $N > N_0$ , on a  $\max_{z \in (a_0, a_{q_{n-1}})} Df^{q_n}(z) \geq 1 + c^{-1}$ .

*Démonstration.* Posons  $\lambda = \max_{z \in (a_0, a_{q_{n-1}})} Df^{q_n}(z)$ . On a  $b_N - b_{N-1} \geq c^{-1}L$ , d'où

$$b_{N-j} - b_{N-j-1} \geq c^{-1}\lambda^{-j}L, \quad 0 \leq j < N$$

$$L \geq b_N - b_0 \geq c^{-1} \frac{1 - \lambda^{-N}}{1 - \lambda^{-1}} L$$

d'où le lemme.  $\square$

Il existe donc exactement deux points  $c_0 < c_1$  dans l'intervalle  $(a_0, a_{q_{n-1}})$  où  $Df^{q_n}$  vaut 1. Soit  $N' < N$  l'entier tel qu'on ait :

$$b_{N'+1} \leq c_1 < b_{N'+2}$$

**Lemme 3.** *On a  $N - N' \leq c$ .*

*Démonstration.* En effet, on a

$$b_{i+1} - b_i \leq b_i - b_{i-1}$$

pour  $N' + 3 \leq i < N$ , et aussi  $b_N - b_{N-1} \geq c^{-1}L$ ,  $b_N - b_{N'+2} \leq L$ .  $\square$

Soit  $M$  l'entier tel qu'on ait  $b_M \leq c_0 < b_{M+1}$ .

**Lemme 4.** *On a  $M \geq c^{-1} \log N$ , et  $N' - M \geq c^{-1} \log N$ .*

*Démonstration.* On a

$$\inf_{0 \leq i \leq N'+1} (b_{i+1} - b_i) \leq cLN^{-1}$$

et

$$\begin{aligned} c^{-1}(b_i - b_{i-1}) &\leq b_{i+1} - b_i \leq b_i - b_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq M \\ b_i - b_{i-1} &\leq b_{i+1} - b_i \leq c(b_i - b_{i-1}), \quad M+1 < i \leq N'+1. \end{aligned}$$

On a donc

$$\inf_{0 \leq i \leq N'+1} (b_{i+1} - b_i) = b_{M+1} - b_M \text{ ou } b_{M+2} - b_{M+1},$$

et dans tous les cas  $b_{M+1} - b_M \leq cLN^{-1}$  tandis que  $b_1 - b_0 \geq c^{-1}L$ ,  $b_{N'+2} - b_{N'+1} \geq c^{-1}L$  (d'après le lemme 3). D'où le lemme 4.  $\square$

**Lemme 5.** *On a  $Df^{q_n}(b_1) \geq c^{-1}$ ,  $c_0 - b_1 \geq c^{-1}L$  et  $Df^{q_n}(b_{N'}) \geq 1 + c^{-1}$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 4, on a  $b_1 < b_2 < c_0$ , d'où

$$\begin{aligned} c_0 - b_1 &\geq b_2 - b_1 \geq c^{-1}L \\ Df^{q_n}(b_1) &\geq \frac{b_2 - b_1}{b_1 - b_0} \geq c^{-1}, \end{aligned}$$

car  $Df^{q_n}$  est croissante sur  $(a_0, c_1)$ .

Pour démontrer la dernière inégalité, nous notons  $c_2$  l'unique point où  $Df^{q_n}$  atteint son maximum sur  $(a_0, a_{q_{n-1}})$  et distinguons deux cas :

1<sup>er</sup> cas :  $b'_{N'} \leq c_2$

On a alors  $Df^{q_n}(z) \leq Df^{q_n}(b_{N'})$  pour  $z \in (a_0, b_{N'})$ , donc  $b_{i+1} - b_i \leq Df^{q_n}(b_{N'})(b_i - b_{i-1})$  pour  $1 \leq i \leq N'$ ; comme on a  $b_{N'+1} - b_{N'} \geq c^{-1}L$  et  $b_{N'+1} - b_0 \leq L$ , ceci implique  $Df^{q_n}(b_{N'}) \geq 1 + c^{-1}$ .

2<sup>e</sup> cas.  $b'_{N'} > c_2$ . Comme  $(Df^{q_n})^{-1/2}$  est convexe sur  $(a_0, a_{q_{n-1}})$ , on a :

$$\frac{1 - (Df^{q_n})^{-1/2}(b_{N'})}{c_1 - b_{N'}} \geq \frac{1 - (Df^{q_n})^{-1/2}(c_2)}{c_1 - c_2}.$$

On a  $c_1 - b_{N'} \geq b_{N'+1} - b_{N'} \geq c^{-1}L \geq c^{-1}(c_1 - c_2)$  et  $1 - (Df^{q_n})^{-1/2}(c_2) \geq c^{-1}$  d'après le lemme 2; on conclut encore qu'on a  $Df^{q_n}(b_{N'}) \geq 1 + c^{-1}$ .  $\square$

Nous allons maintenant comparer  $f^{q_n}$ , sur l'intervalle  $[b_1, b_{N'}]$ , aux deux transformations homographiques suivantes :

— la transformation homographique  $g_0$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} g_0(c_0) &= f^{q_n}(c_0); \\ Dg_0(c_0) &= 1 = Df^{q_n}(c_0); \\ Dg_0(b_1) &= Df^{q_n}(b_1), \end{aligned}$$

— la transformation homographique  $g_1$  qui vérifie

$$\begin{aligned} g_1(c_0) &= f^{q_n}(c_0); \\ Dg_1(c_0) &= 1 = Df^{q_n}(c_1); \\ Dg_1(b_{N'}) &= Df^{q_n}(b_{N'}). \end{aligned}$$

Comme  $(Df^{q_n})^{-1/2}$  est convexe sur l'intervalle  $(a_0, a_{q_{n-1}})$ , on aura :

— sur l'intervalle  $[b_1, c_0]$

$$Dg_1(x) \geq Df^{q_n}(x) \geq Dg_0(x)$$

— sur l'intervalle  $[c_0, b_{N'}]$

$$Dg_0(x) \geq Df^{q_n}(x) \geq Dg_1(x)$$

donc

$$g_0(x) \geq f^{q_n}(x) \geq g_1(x)$$

pour tout  $x \in [b_1, b_{N'}]$ , avec égalité en  $c_0$ .

**Remarque 7.** Il est possible que le pôle  $c_3$  de  $g_0$  appartienne à l'intervalle  $(c_0, b_{N'})$ ; on aura alors seulement  $g_0(x) \geq f^{q_n}(x)$  pour  $x \in (c_0, c_3)$ .

## 5. UN CALCUL ANNEXE

5.1. . Soient  $\delta > 0, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Définissons une transformation homographique  $g_{\delta, \theta}$  par :

$$g_{\delta, \theta}(x) = \frac{x + \delta \tan \theta}{1 - \delta^{-1} \tan \theta x}.$$

Son pôle est égal à  $\delta \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$ . Si on pose  $x = \delta \tan u$ , on aura  $g_{\delta, \theta}(x) = \delta \tan(u + \theta)$ .

Sur l'intervalle  $(-\infty, \delta \tan(\frac{\pi}{2} - \theta))$ ,  $g_{\delta, \theta}(x) - x$  est strictement positif, minimal pour  $x_0 = -\delta \tan \frac{\theta}{2}$ , et on a  $Dg_{\delta, \theta}(x_0) = 1$ ,  $g_{\delta, \theta}(x_0) = -x_0 = \delta \tan \frac{\theta}{2}$ ,  $g_{\delta, \theta}(x_0) - x_0 = 2\delta \tan \frac{\theta}{2}$ . Finalement, on a :

$$[Dg_{\delta, \theta}(x)]^{-1/2} = |\cos \theta - \delta^{-1} \sin \theta x|$$

5.2. . Soit  $g$  une transformation homographique de  $\overline{\mathbb{R}}$  préservant l'orientation et de pôle fini  $w$  strictement positif. Supposons que  $g$  n'a pas de point fixe (réel) et que l'unique point  $x_0 \in (-\infty, w)$  où  $g'(x_0) = 1$  vérifie :

$$g(x_0) = -x_0.$$

Alors il existe  $\delta > 0, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  tels que  $g = g_{\delta, \theta}$ . La vérification est immédiate.

5.3. . Posons  $c'_0 = \frac{1}{2}(c_0 + f^{q_n}(c_0))$  (plus précisément on choisit un relèvement de  $f$  et on pose  $c'_0 = \frac{1}{2}(c_0 + f^{q_n}(c_0) - p_n)$ ).

Posons  $\tilde{g}_i(x) = g_i(x + c'_0) - c'_0$ , pour  $i = 0, 1$ .

Les transformations homographiques  $\tilde{g}_0, \tilde{g}_1$  satisfont aux conditions de 5.2, donc on a :

$$\tilde{g}_i = g_{\delta_i, \theta_i} \quad \text{pour } i = 0, 1.$$

On a alors

$$2\delta_i \tan \frac{\theta_i}{2} = f^{q_n}(c_0) - c_0, \quad \text{pour } i = 0, 1.$$

En estimant d'autre part la pente de la fonction affine  $(D\tilde{g}_i)^{-1/2}$ , on a d'autre part :

$$\frac{[Df^{q_n}(b_1)]^{-1/2} - 1}{c_0 - b_1} = \delta_0^{-1} \sin \theta_0 > \delta_1^{-1} \sin \theta_1 = \frac{1 - [Df^{q_n}(b_{N'})]^{-1/2}}{b_{N'} - c_0}$$

ce qui donne, d'après le lemme 5

$$cL^{-1} > \delta_0^{-1} \sin \theta_0 > \delta_1^{-1} \sin \theta_1 > c^{-1}L^{-1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} c(f^{q_n}(c_0) - c_0)^{1/2}L^{-1/2} > \theta_0 > \theta_1 > c^{-1}(f^{q_n}(c_0) - c_0)^{1/2}L^{-1/2} \\ c(f^{q_n}(c_0) - c_0)^{1/2}L^{-1/2} > \delta_1 > \delta_0 > c^{-1}(f^{q_n}(c_0) - c_0)^{1/2}L^{-1/2}. \end{aligned}$$

6. —

Nous sommes finalement en mesure d'estimer la disposition des points  $b_i$  pour  $1 \leq i \leq N'$ .

Posons  $\ell = (f^{q_n}(c_0) - c_0)$ ,  $c'_0 - b_1 = \delta_0 \tan u_0 = \delta_1 \tan u_1$ ,  $b_{N'} - c'_0 = \delta_0 \tan v_0 = \delta_1 \tan v_1$  (avec  $-\frac{\pi}{2} < u_0, u_1 < 0 < v_0, v_1 < \frac{\pi}{2}$ ).

Comme  $f^{q_n} \geq g_1$  sur  $[b, b_{N'}]$ , on a :

$$v_1 - u_1 \geq (N' - 1)\theta_1,$$

et comme  $f^{q_n} \leq g_0$  sur  $[b_1, \inf(b_{N'}, \text{pole de } g_0)]$  on a :

$$v_0 - u_0 \leq (N' - 1)\theta_0.$$

Comme on a

$$\begin{aligned} c^{-1}L \leq c'_0 - b_1 \leq L, \quad c^{-1}L \leq b_{N'} - c'_0 \leq L \\ c^{-1}L^{1/2}\ell^{1/2} \leq \delta_0 \leq \delta_1 \leq cL^{1/2}\ell^{1/2}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} c^{-1}\left(\frac{\ell}{L}\right)^{1/2} < u_i + \frac{\pi}{2} < c\left(\frac{\ell}{L}\right)^{1/2} \\ c^{-1}\left(\frac{\ell}{L}\right)^{1/2} < \frac{\pi}{2} - v_i < c\left(\frac{\ell}{L}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

En particulier, on a  $v_0 - u_0 > \frac{\pi}{2}$ , donc

$$\theta_0 \geq \frac{c^{-1}}{N}$$

$$\theta_1 \leq \frac{c^{-1}}{N} \quad (\text{d'après l'estimation ci dessus et le lemme 3})$$

et on conclut d'après 5.3 qu'on a :

$$c^{-1}LN^{-2} \leq \ell = f^{q_n}(c_0) - c_0 \leq cLN^{-2}$$

Soit  $N_0 = \frac{\pi}{4\theta_0} \geq c^{-1}N$ .

Pour  $1 \leq j \leq N_0$ , on a :

$$g_1^{j-1}(b_1) \leq b_j = f^{(j-1)q_n}(b_1) \leq g_0^{j-1}(b_1)$$

donc  $\frac{cL}{j} \geq c'_0 - b_j \geq \frac{c^{-1}L}{j}$  et

$$\frac{cL}{j^2} \geq g_0(b_j) - b_j \geq b_{j+1} - b_j \geq g_1(b_j) - b_j \geq \frac{c^{-1}L}{j^2}.$$

De même, on a :

$$\frac{cL}{j^2} \geq b_{N'-j+1} - b_{N'-j} \geq \frac{c^{-1}L}{j^2}$$

pour  $1 \leq j \leq N_0$ .

Finalement, pour  $N_0 \leq j \leq N' - N_0$ , on a

$$|c'_0 - b_j| \leq \frac{cL}{N},$$

donc

$$c^{-1}LN^{-2} \leq b_{j+1} - b_j \leq cLN^{-2}.$$

En réécrivant de façon légèrement différente ces estimations, compte tenu de ce que  $N_0 \geq c^{-1}N$  et  $N - N' \leq c$ , on obtient :

**Proposition 8.** *Pour  $1 \leq i \leq N$ , en posant  $\bar{i} = \min(i, N + 1 - i)$ , on a*

$$c^{-1}L\bar{i}^{-2} \leq b_i - b_{i-1} \leq cL\bar{i}^{-2}$$

(pour  $i = 1$ , on peut aussi remplacer  $b_0$  par  $a_0$ ).

La disposition des points de  $K_{n+1}$  dans les autres intervalles du complémentaire de  $K_n$  est en tous points identiques, à ceci près que certains de ces intervalles contiennent  $N$  (au lieu de  $N - 1$ ) points de  $K_{n+1}$ . Plus précisément, si  $(a_k, a_\ell)$  est un intervalle du complémentaire de  $K_n$ , et si on note  $b'_1 < b'_2 < \dots < b'_{\tilde{N}}$  (avec  $\tilde{N} = N$  ou  $N - 1$ ) les points de  $K_{n+1}$  dans cet intervalle, on a, en posant  $b'_0 = a_k, b'_{\tilde{N}+1} = a_\ell$  :

$$c^{-1}|a_\ell - a_k|\bar{j}^{-2} \leq b'_j - b'_{j-1} \leq c|a_\ell - a_k|\bar{j}^{-2}, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq \tilde{N} + 1$$

en posant  $\bar{j} = \min(j, \tilde{N} + 2 - j)$ .

Pour voir ceci, il suffit de remarquer qu'on a :

$$c^{-1} \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_\ell - a_k} \leq [b'_{j-1}, b'_j, f^{-q_{n-1}}(b'_j), f^{-2q_{n-1}}(b'_j)] \leq c \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_\ell - a_k}$$

On a aussi

$$c^{-1} \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_\ell - a_k} \leq [f^{q_n}(b'_{j-1}), f^{q_n}(b'_j), f^{q_n - q_{n-1}}(b'_j), f^{q_n - 2q_{n-1}}(b'_j)] \leq c \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_\ell - a_k}$$

(comparer intervalle par intervalle) donc on a

$$c^{-1} \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_\ell - a_k} \leq [f^k(b'_{j-1}), f^k(b'_j), f^{k - q_{n-1}}(b'_j), f^{k - 2q_{n-1}}(b'_j)] \leq c \frac{b'_j - b'_{j-1}}{a_\ell - a_k}$$

(car  $0 \leq k < q_n$ ).

Or on a  $f^k(b'_{j-1}) = b_{j-1}$  (sauf  $f^k(b_0) = f^k(a_k) = a_0$ ) et  $f^k(b'_j) = b_j$ , donc l'estimation désirée résulte de la proposition précédente.

7. —

Soient  $f, f'$  deux homéomorphismes analytiques du cercle, préservant l'orientation. On suppose que  $f$  et  $f'$  ont exactement un point critique, noté  $a_0$  pour  $f$  et  $a'_0$  pour  $f'$ . On suppose aussi que  $f$  et  $f'$  ont même nombre de rotation irrationnel, noté  $\alpha$ . Comme  $f$  et  $f'$  sont minimaux, il existe exactement un homéomorphisme du cercle  $h$  préservant l'orientation et vérifiant :

$$\begin{aligned} h(a_0) &= a'_0 \\ h \circ f &= f' \circ h. \end{aligned}$$

**Théorème 9.** *L'homéomorphisme  $h$  est quasisymétrique.*

*Démonstration.* Notons  $(p_n/q_n)$  la suite des réduites de  $\alpha$ ; posons aussi, pour  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $j \geq 0, n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} a_j &= f^{-j}(a_0) \\ a'_j &= f'^{-j}(a'_0) \\ m_n(x) &= |f^{q_n}(x) - x| \\ m'_n(x) &= |f'^{q_n}(x) - x| \\ K_n &= \{a_i, 0 \leq i < q_n\} \\ K'_n &= \{a'_i, 0 \leq i < q_n\}. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer qu'il existe une constant  $c_0 > 1$  telle qu'on ait, pour tous  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  :

$$\begin{aligned} h(x) - h(x-t) &\leq c_0(h(x+c_0t) - h(x)) \\ h(x+t) - h(x) &\leq c_0(h(x) - h(x-c_0t)). \end{aligned}$$

Nous allons seulement vérifier la première inégalité, la seconde étant parfaitement similaire.

Soient donc  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  et  $c_0 > 1$  assez grand (indépendamment de  $x$  et  $t$ ). Soit  $n$  le plus petit entier tel que l'intervalle  $[x-t, x]$  contient (au moins) un point de  $K_n$ . Distinguons 2 cas :

1<sup>er</sup> cas : L'intervalle  $[x-t, x]$  contient exactement un point, noté  $y$  de  $K_n$ .

Soit alors  $m \geq n$  le plus petit entier tel que  $K_{m+1} \cap [x-t, x]$  contient un point distinct de  $y$ . Notons  $z$  un point de  $K_{m+1} \cap [x-t, x]$  précédant ou suivant  $y$  dans  $K_{m+1}$ . Notons  $z_0 < y < z_1 < z_2$  les quatre points consécutifs de  $K_m$  autour de  $y$ . On a

$$\begin{aligned} |z - y| &\leq t \\ z_0 < x - t \leq y &\leq x < z_1 < z_2, \end{aligned}$$

et  $|z_0 - y| \leq ct$

$$\begin{aligned} |z_1 - y| &\leq ct \\ |z_2 - z_1| &\leq ct \end{aligned}$$

donc  $[z, z_2] \subset [x, x+c_0t]$ , si  $c_0$  est assez grand.

Si  $y', z', z'_0, z'_1, z'_2$  sont les points correspondants de  $K'_{m+1}$  on a alors

$$z'_0 < h(x-t) < z' < h(x) < z'_1 < z'_2 < h(x+c_0t),$$

d'où

$$h(x) - h(x-t) < z'_1 - z'_0 \leq c(z'_2 - z'_1) \leq c(h(x+c_0t) - h(x)).$$

2<sup>e</sup> cas : L'intervalle  $[x-t, x]$  contient au moins deux points de  $K_n$ .

Soit  $y$  le point de  $K_{n-1}$  immédiatement supérieur à  $x$ .

- a) Si  $y$  appartient à  $[x, x+c_0t]$  et  $c_0$  est assez grand, il résulte de la proposition 6 que le point  $z$  précédant ou le point suivant  $y$  dans  $K_n$  appartient encore à  $[x, x+c_0t]$ . En notant  $y_0$  le point précédant  $y$  dans  $K_{n-1}$  on a donc

$$\begin{aligned} y_0 < x - t < x < y, \\ |y - z| &< c_0t \end{aligned}$$

et en notant  $y'_0, y', z'$  les points correspondant :

$$\begin{aligned} y'_0 < h(x-t) < h(x) < y' \\ |y' - z'| &\geq c^{-1}|y' - y'_0| \end{aligned}$$

donc

$$h(x + c_0 t) - h(x) \geq |y' - z'| \geq c^{-1} |y' - y'_0| \geq c^{-1} (h(x) - h(x - t))$$

- b) Il reste finalement le cas où  $y > x + c_0 t$ . Notons encore  $y_0$  le point précédant  $y$  dans  $K_{n-1}$ , et notons  $b_1 < \dots < b_N$  les points de  $K_n$  dans  $(y_0, y)$  en posant  $b_0 = y_0$  et  $b_{N+1} = y$ ;  $L = |y - y_0|$ .

Soient  $j_0, j_1, j_2$  des entiers tels que

$$b_{j_0} < x - t \leq b_{j_0+1}$$

$$b_{j_1} < x \leq b_{j_1+1}$$

$$b_{j_2} < x + c_0 t \leq b_{j_2+1}.$$

On a  $0 \leq j_0 < j_1 < j_2 \leq N$ , et  $j_1 \geq j_0 + 2$ .

En posant  $a(j) = (\inf(j, N + 2 - j))^{-2}$  pour  $1 \leq j \leq N + 1$ , on a d'après les estimations de la Section 6 :

$$t \geq b_{j_1} - b_{j_0+1} \geq c^{-1} L \sum_{i=j_0+2}^{j_1} a(i)$$

$$c_0 t \leq b_{j_2+1} - b_{j_1} \leq cL \sum_{i=j_1+1}^{j_2+1} a(i)$$

$$\begin{aligned} h(x) - h(x - t) &\leq b'_{j_1+1} - b'_{j_0} \\ &\leq cL' \sum_{i=j_0+1}^{j_1+1} a(i) \\ &\leq cL' \sum_{i=j_0+2}^{j_1} a(i) \leq c \frac{L'}{L} t \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h(x + c_0 t) - h(x) &\geq c^{-1} L' \sum_{i=j_1+2}^{j_2} a(i) \\ &\geq c^{-1} L' \sum_{i=j_1+1}^{j_2+1} a(i) \leq c^{-1} \frac{L'}{L} t \end{aligned}$$

(a vrai dire, il faut encore éliminer le cas où  $j_2 = j_1 + 1$ ; c'est incompatible, pour  $c_0$  assez grand, avec le fait que  $[x - t, x]$  contienne 2 points de  $K_n$ )

(On a noté  $b'_j, L'$  les grandeurs correspondantes pour  $f'$ ).

□

## 8. EXTENSION QUASICONFORME DE LA CONJUGAISON À UNE ROTATION LORSQUE LE NOMBRE DE ROTATION EST DE TYPE CONSTANT

8.1. . Soit  $f$ , comme précédemment, un homéomorphisme analytique du cercle, préservant l'orientation, et ayant exactement 1 point critique. Notons  $\alpha$  le nombre de rotation de  $f$ ,  $(p_n/q_n)$  la suite des réduites de  $\alpha$ .

On a, pour  $n \geq 0$  :

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}, \quad \text{avec } a_{n+1} \geq 1.$$

Supposons que  $\alpha$  est de type constant, c'est à dire qu'on a :

$$\sup_{n \geq 0} a_{n+1} < +\infty$$

(ou encore  $\inf_{n \geq 0} q_n |q_n \alpha - p_n| > 0$ ).

Posons  $N = \sup_{n \geq 0} a_{n+1}$ .

Rappelons que  $f$  est minimal, donc topologiquement conjugué à la rotation  $R_\alpha$ . De plus (cf. Herman<sup>1</sup>, d'après Schwiatek), la conjugaison est un homéomorphisme quasimétrique du cercle.

Plus précisément, notons  $h$  l'unique homéomorphisme de  $D^0(\mathbb{R})$  qui envoie 0 sur le relèvement  $a_0$  du point critique de  $f$  et vérifie  $h \circ R_\alpha = f \circ h$ .

L'homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}$  est quasimétrique et commute avec la translation  $x \mapsto x+1$ . Il existe donc un homéomorphisme quasiconforme  $H$  du demi-plan supérieur (fermé)  $\mathbb{H} = \{z, \text{Im } z \geq 0\}$  qui commute avec la translation  $z \mapsto z+1$ , et dont la restriction au bord  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{H}$  soit égale à  $h$ .

Posons  $K = \sup_{x \in \mathbb{H}} \text{ess} \frac{\max_{\|v\|=1} \|DH(x).v\|}{\min_{\|v\|=1} \|DH(x).v\|}$ .

Nous allons montrer la :

**Proposition 10.** *On peut choisir l'extension quasiconforme  $H$  de la conjugaison  $h$  de façon à avoir :*

$$K \leq c[\log(1+N)]^2$$

où  $c$  est une constante ne dépendant que des caractéristiques "macroscopiques" de  $f$ , en particulier  $c$  ne change pas lorsqu'on remplace  $f$  par  $R_\theta \circ f$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**8.2. Construction de  $H$ .** Posons, pour  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \tilde{K}_n &= \{f^{-j}(a_0) + k, 0 \leq j < q_n, k \in \mathbb{Z}\} \\ \tilde{K}'_n &= \{k - j\alpha, 0 \leq j < q_n, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

L'homéomorphisme  $h$  envoie le point  $k - j\alpha$  sur le point  $f^{-j}(a_0) + k$ , donc  $\tilde{K}'_n$  sur  $\tilde{K}_n$ .

Soit  $n \geq 0$ , et  $x \in \tilde{K}_n$ ; notons  $d_n(x)$  la somme des distances de  $x$  aux points de  $\tilde{K}_n$  précédant et suivant  $x$ ; notons  $j_n(x)$  le point de  $\mathbb{H}$  égal à  $x + id_n(x)$ .

Notons de façon analogue, pour un point  $x' \in \tilde{K}'_n$ , par  $d'_n(x')$  la somme des distances de  $x$  aux points de  $\tilde{K}'_n$  précédant et suivant  $x'$  dans  $\tilde{K}'_n$ , et posons  $j'_n(x') = x' + id'_n(x')$ . Notons  $x^+$  (resp.  $x'^+$ ) le point suivant  $x$  (resp.  $x'$ ) dans  $\tilde{K}_n$  (resp.  $\tilde{K}'_n$ ). Soit  $M$  le nombre de points de  $\tilde{K}_{n+1}$  dans l'intervalle  $(x, x^+)$  (ou de  $\tilde{K}'_{n+1}$  dans l'intervalle  $(x', x'^+)$ ). On a  $0 \leq M \leq N$ .

Notons aussi  $x^-$  (resp.  $x'^-$ ) le point précédant  $x$  (resp.  $x'$ ) dans  $\tilde{K}_n$  (resp.  $\tilde{K}'_n$ ).

Notons  $x_1 < \dots < x_M$  les points de  $\tilde{K}_{n+1}$  dans l'intervalle  $(x, x^+)$ ,  $x'_1 < \dots < x'_M$  les points de  $\tilde{K}'_{n+1}$  dans l'intervalle  $(x', x'^+)$ . Notons enfin  $x^{++}$  (resp.  $x'^{++}$ ) le point suivant  $x^+$  (resp.  $x'^+$ ) dans  $\tilde{K}_n$ .

Soit  $P_n(x)$  la ligne polygonale fermée joignant les points  $j_n(x), j_{n+1}(x), j_{n+1}(x_1), \dots, j_{n+1}(x_M), j_{n+1}(x^+), j_n(x^+), j_n(x)$ . Notons de même  $P'_n(x')$  la ligne polygonale joignant  $j'_n(x'), j'_{n+1}(x'), j'_{n+1}(x'_1), \dots, j'_{n+1}(x'_M), j'_{n+1}(x'^+), j'_n(x'^+), j'_n(x')$ .

1. Voir le texte "Conjugaison quasi symétrique des homéomorphismes analytiques du cercle à des rotations" disponible sur le lien ([http://www.college-de-france.fr/media/jean-christophe-yoccoz/UPL31729\\_Herman\\_man\\_1\\_Yoc.pdf](http://www.college-de-france.fr/media/jean-christophe-yoccoz/UPL31729_Herman_man_1_Yoc.pdf)) vers les archives Michel Herman.

Il est facile de voir que  $P_n(x)$  et  $P'_n(x')$  sont des courbes de Jordan (i.e. n'ont pas de "self-intersection"), sauf dans le cas où  $M = 0$  et  $\tilde{K}_{n+1} - \tilde{K}_n$  n'a pas de points dans  $(x^-, x^{++})$ , auquel cas  $P_n$  est le segment  $[j_n(x), j_n(x^+)]$ , parcouru deux fois. (En effet, on a  $j_{n+1}(x_\ell) < j_n(x)$ ,  $j_{n+1}(x_\ell) < j_n(x^+)$  pour  $1 \leq \ell \leq M$ , et  $j_{n+1}(x) \leq j_n(x)$ ,  $j_{n+1}(x^+) \leq j_n(x^+)$  avec double égalité uniquement dans le cas ci dessus)

Soit  $L_n$  la ligne polygônale joignant les points  $j_n(x)$ , lorsque  $x$  décrit en croissant  $\tilde{K}_n$ . Soit de même  $L'_n$  la ligne joignant les points  $j'_n(x')$ , lorsque  $x'$  décrit en croissant  $\tilde{K}'_n$ .

La ligne  $L_n$  est située au dessus de  $L_{n+1}$  (avec des portions communes eventuelles lorsque  $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$ ) de même  $L'_n$  est située au dessus de  $L'_{n+1}$ .

La bande fermée située entre  $L_n$  et  $L_{n+1}$  est l'union des polygones  $Q_n(x)$  délimités par les  $P_n(x)$ , pour  $x$  décrivant  $\tilde{K}_n$ . De même la bande entre  $L'_n$  et  $L'_{n+1}$  est union des polygones  $Q'_n(x')$  délimités par les  $P'_n(x')$ , lorsque  $x'$  décrit  $\tilde{K}'_n$ .

Soit  $x \in \tilde{K}_n$ ,  $x' = h^{-1}(x) \in \tilde{K}'_n$ . Notons  $w$  l'application de  $P'_n(x')$  sur  $P_n(x)$  qui envoie  $j'_n(x')$  sur  $j_n(x)$ ,  $j'_{n+1}(x')$  sur  $j_{n+1}(x)$ ,  $j'_{n+1}(x'_i)$  sur  $j_{n+1}(x_i)$  (pour  $1 \leq i \leq M$ ),  $j'_{n+1}(x'^+)$  sur  $j_{n+1}(x^+)$ ,  $j'_n(x'^+)$  sur  $j_n(x^+)$ , et est affine sur les segments joignant ces points.

Nous allons montrer qu'il existe un homéomorphisme quasiconforme  $W$  de  $Q'_n(x')$  sur  $Q_n(x)$ , dont la restriction à  $P'_n(x')$  est égale à  $P_n(x)$ , et dont le rapport de dilatation maximal est  $\leq c(\log(M+2))^2$ .

Or on a :

$$- \{z, 0 < \text{Im } z \leq 2\} = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{x \in \tilde{K}_n} Q_n(x),$$

$$- L_0 = \{z, \text{Im } z = 2\} = L'_0$$

— Pour  $k \in \mathbb{Z} = \tilde{K}'_0$ , le bord supérieur de  $Q'_0(k)$  est le segment  $[k+2i, k+1+2i]$  et l'application  $w$  définie ci dessus envoie de manière affine ce segment sur le segment  $[a_0+k+2i, a_0+k+1+2i]$

— si  $y \in \mathbb{H}$  appartient à deux polygones  $Q'_n(x')$  et  $Q'_m(y')$  ( $x' \in \tilde{K}'_n$ ,  $y' \in \tilde{K}'_m$ ) les images de  $y$  par les applications  $w$  associées à ces deux polygones sont égales.

Donc on peut recoller les applications  $W$  mentionnées ci-dessus en un homéomorphisme quasiconforme de  $\{z, 0 < \text{Im } z \leq 2\}$ , qui s'étend en un homéomorphisme (quasiconforme) de  $\{z, 0 \leq \text{Im } z \leq 2\}$  dont la restriction à  $\mathbb{R}$  est égale à  $h$ . Finalement, en posant  $H(z) = z + a_0$  pour  $\text{Im } z \geq 2$ , on obtient une extension quasiconforme de  $h$  ayant les propriétés désirées.

**8.3. Construction de  $W$ .** Lorsque  $M \leq c'$ , la construction de  $W$  de rapport de dilatation maximal  $\leq c$ , ne présente pas de problèmes : on peut par exemple choisir l'unique application qui coïncide avec  $W$  sur le bord et est affine sur chacun des triangles :

- $j'_n(x')$ ,  $j'_n(x'^+)$ ,  $j'_{n+1}(x')$
- $j'_n(x'^+)$ ,  $j'_{n+1}(x')$ ,  $j'_{n+1}(x_1)$
- $j'_n(x'^+)$ ,  $j'_{n+1}(x_1)$ ,  $j'_{n+1}(x_2)$
- $\vdots$
- $j'_n(x'^+)$ ,  $j'_{n+1}(x_{M-1})$ ,  $j'_{n+1}(x_M)$
- $j'_n(x'^+)$ ,  $j'_{n+1}(x_M)$ ,  $j'_{n+1}(x'^+)$ .

Ces triangles et leurs images ayant des angles minorés, l'assertion sur le rapport de dilatation maximal de  $W$  en résulte. Nous supposons désormais que  $M \geq c'$  est assez grand.

Nous allons d'abord nous ramener pour  $Q_n(x)$  et  $Q'_n(x')$ , à des modèles standards qui s'en déduisent par des homéomorphismes quasiconformes dont le rapport de dilatation maximal est borné (indépendamment de  $M$ ).

C'est ainsi qu'il existe un homéomorphisme quasiconforme  $W'_1$ , de rapport de dilatation maximal borné indépendamment de  $M$ , possédant les propriétés suivantes :

$$\text{— } W'_1(Q'_n(x')) = \overline{\mathbb{D}}, W'_1(P'_n(x')) = S^1$$

—

$$W'_1(j'_n(x')) = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$$

$$W'_1(j'_{n+1}(x')) = e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

$$W'_1(j'_{n+1}(x'_j)) = e^{i(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2(M+1)}j)} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq M$$

$$\text{— } W'_1(j'_{n+1}(x'^+)) = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$\text{— } W'_1(j'_n(x'^+)) = e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

— L'application  $\log W'_1$  est affine sur chacun des cotés de  $P'_n(x')$ .

De même, il existe un homéomorphisme quasiconforme  $W_1$ , de rapport de dilatation maximal borné indépendamment de  $M$ , qui vérifie :

$$\text{— } W_1(Q_n(x)) = \overline{\mathbb{D}}, W_1(P_n(x)) = S^1$$

—

$$W_1(j_n(x)) = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$$

$$W_1(j_{n+1}(x)) = e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

$$W_1(j_{n+1}(x^+)) = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$W_1(j_n(x^+)) = e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

—  $\log W_1$  est affine sur chacun des cotés  $[j_{n+1}(x), j_n(x)]$ ,  $[j_{n+1}(x^+), j_n(x^+)]$ ,  $[j_{n+1}(x), j_n(x^+)]$  de  $P_n(x)$ .

— il existe un élément  $\beta_0$  de  $\text{Möb}(\mathbb{D})$  fixant 1 et  $e^{-\frac{i\pi}{4}}$ , satisfaisant

$$\text{— } cM \geq D\beta_0(e^{-\frac{i\pi}{4}}) \geq c^{-1}M$$

$$\text{— } cM^{-1} \geq D\beta_0(1) \geq c^{-1}M^{-1}$$

$$\text{— } W_1(j_{n+1}(x_j)) = \beta_0(W'_1(j'_{n+1}(x'_j))) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq \frac{M+1}{2}$$

$$\text{— } W_1 w W_1^{-1} \equiv \beta_0 \text{ sur l'arc de cercle } [e^{-\frac{i\pi}{4}}, 1]$$

— il existe un élément  $\beta_1$  de  $\text{Möb}(\mathbb{D})$  fixant 1 et  $e^{\frac{i\pi}{4}}$  et satisfaisant

$$cM \geq D\beta_1(e^{\frac{i\pi}{4}}) \geq c^{-1}M$$

$$cM^{-1} \geq D\beta_1(1) \geq c^{-1}M^{-1}$$

$$W_1(j_{n+1}(x_j)) = \beta_1(W'_1(j'_{n+1}(x'_j))) \quad \text{pour } \frac{M+1}{2} \leq j \leq M$$

$$W_1 w W_1^{-1} \equiv \beta_1 \text{ sur l'arc de cercle } [1, e^{\frac{i\pi}{4}}].$$

L'existence de  $W_1$  et  $W'_1$ , avec des rapports de dilatations maximaux indépendants de  $M$ , se vérifie aisément, à partir des estimations de la Section 6.

En écrivant maintenant l'homéomorphisme  $W$  cherché sous la forme  $W = W_1^{-1}W_0W'_1$  nous sommes ramenés à montrer qu'il existe un homéomorphisme quasiconforme  $W_0$  du disque dans lui-même, de rapport de dilatation maximal  $\leq c(\log(2+M))^2$  et qui coïncide sur  $S^1$  avec

$$\text{— l'identité sur } [e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{-\frac{i\pi}{4}}]$$

$$\text{— } \beta_0 \text{ sur } [e^{-\frac{i\pi}{4}}, 1]$$

$$\text{— } \beta_1 \text{ sur } [1, e^{\frac{i\pi}{4}}]$$

Cela résulte du lemme suivant, qui se déduit immédiatement d'une construction due à Strebel.

**Lemme 6.** Soient  $L \geq 2$  et  $x_1, \dots, x_L = x_0$  des points distincts de  $S^1$  rencontrés dans cet ordre lorsqu'on parcourt  $S^1$  dans le sens positif. Pour  $1 \leq i \leq L$ , soit  $\beta_i$  un élément de  $\text{Möb}(\mathbb{D})$  qui fixe  $x_{i-1}$  et  $x_i$ . Soit  $\beta$  l'homéomorphisme de  $S^1$  qui coïncide avec  $\beta_i$  sur  $[x_{i-1}, x_i]$ . Posons  $K = \max_{1 \leq i \leq L} (D\beta_i(x_{i-1}), D\beta_i(x_i))$ .

Il existe alors un homéomorphisme quasiconforme  $B$  de  $\overline{\mathbb{D}}$  qui coïncide avec  $\beta$  sur  $S^1$  et dont le rapport de dilatation maximal est  $\leq c(1 + (\log K)^2)$ .

*Démonstration.* Soit  $\ell_i$  la géodésique hyperbolique joignant  $x_{i-1}$  à  $x_i$ , et  $U_i$  le domaine fermé delimité par l'arc de cercle  $[x_{i-1}, x_i]$  et  $\ell_i$ .

Soit  $W_i$  une homographie envoyant  $x_{i-1}$  sur 0,  $x_i$  sur  $\infty$  et  $\overline{\mathbb{D}}$  sur  $\overline{\mathbb{H}}$ . L'image par  $W_i$  de  $U_i$  est le quadrant  $\{z, \text{Re } z \geq 0, \text{Im } z \geq 0\}$ , et  $W_i\beta_iW_i^{-1}$  est une homothétie  $x \mapsto \lambda_i x$ , avec  $K^{-1} \leq \lambda_i \leq K$ .

Nous prolongeons  $\beta_i$  en un homéomorphisme quasiconforme  $B_i$  de  $U_i$ , égal à l'identité sur  $\ell_i$ , et dont le rapport de dilatation maximal est  $\leq c(1 + |\log \lambda_i|^2)$  de la façon suivant :

$$W_i(B_i(z)) = B'_i(W_i(z)), \quad z \in U_i$$

avec

$$B'_i(\rho e^{i\frac{\pi}{2}t}) = \rho e^{i\frac{\pi}{2}t} e^{(1-t)\log \lambda_i}$$

pour  $\rho \geq 0, 0 \leq t \leq 1$ .

Finalement, nous définissons  $B$  comme étant égal à  $B_i$  sur  $U_i$  pour  $1 \leq i \leq L$ , et coïncident avec l'identité sur  $\overline{\mathbb{D}} - \bigcup_{1 \leq i \leq L} U_i$ .  $\square$