exposé spéculatif

Jean Christophe Yoccoz

21-4-1986

Configurations centrales dans le pb des 4 corps dans le plan

$\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_4 \in \mathbb{R}^\nu$

2 moment d'inertie $\tilde{I} = \sum m_i r_i^2$

énergie potentielle $U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|r_i - r_j\|}$

Pb 1 Extrémiser U à I constant (la valeur de I n'importe pas par raison d'homogénéité).

Remarques : (a) Tout extremum vérifie : $\sum m_i r_i = 0$

(b) $I = \sum_{i<j} m_i m_j (r_i - r_j)^2$

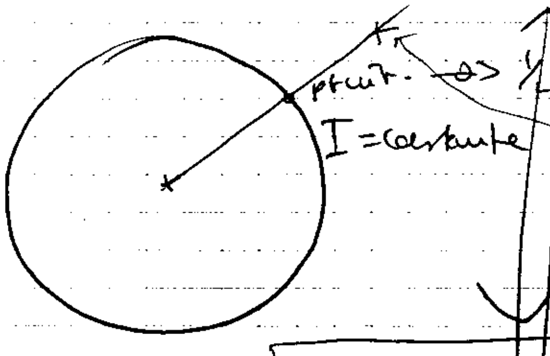
$= \sum_{i<j} m_i m_j (r_i^2 + r_j^2 - 2 r_i \cdot r_j)$

$= 2\left(\sum m_i\right) \tilde{I}$ si $\sum m_i r_i = 0$.

On peut donc remplacer $\tilde{I}$ par I

Personne ne se sert du fait que si $n \geq 4$, les $\mu_{ij} > 0$ ne sont pas arbitraires !

Pb 1 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Extrémiser } U^2 I}$ (sans contrainte). homogène de degré 0.



→ 1 droite par

$\boxed{\text{Extrémiser } U + \lambda I, \text{ où } \lambda > 0 \text{ est fixé}}$

toujours à cause de l'homogénéité.

→ 1 pt critique sur chaque ½ droite

$\lambda = \frac{1}{2}$ appelée dans les calculs.

Notations

$$\mu_{ij} = m_i m_j$$

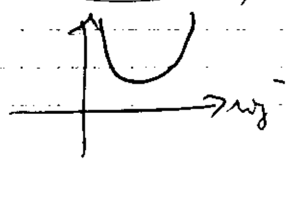
$$r_{ij} = |r_i - r_j|$$

$$I = \sum \mu_{ij} r_{ij}^2$$

$$U = \sum \frac{\mu_{ij}}{r_{ij}}$$

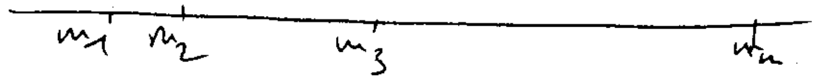
<u>Pb</u> : extrémiser U à I constant.

$$U + \frac{1}{2} I = \sum \mu_{ij} \left(\frac{1}{2} r_{ij}^2 + \frac{1}{r_{ij}} \right)$$



Les cas faciles :

① $\boxed{\nu = 1}$ Configurations de Moulton.



$r_{ij} = r_{ik} + r_{kj}$ pour $i < k < j$.

$U + \frac{1}{2} I = \sum \mu_{ij} \left(\frac{1}{2} r_{ij}^2 + \frac{1}{r_{ij}} \right)$ est convexe en les $r_{ij} > 0$ considérés comme indépendants

On extrémise avec la contrainte $\left(1 + \frac{2}{r_{ij}^3} > 0 \right)$.

[polyèdre : $r_{ij} > 0$
$r_{ij} = r_{ik} + r_{kj}$ pour $i < k < j$

fonction encore convexe sur sous espace linéaire.
∞ sur le bord ⇒ unique pt critique
qui est un minimum non dégénéré.

⇒ À chaque ordre ⇒ 1 configuration centrale.

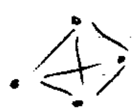
② $\boxed{\nu = n-1}$ $r_1, \dots, r_n$ affinement indépendants.

Alors les r_{ij} sont indépendants (mais ∃ ≤)

on extrémise donc $U + \frac{1}{2} I$ sans contrainte.

dérivée $r_{ij} - \frac{1}{r_{ij}^2}$ ⇒ $r_{ij} = 1$ i.e. tétraèdre généralisé.

$\nu = 2$  Lagrange triangle équilatéral

$\nu = 3$  tétraèdre régulier.

→ cqfd pour $n = 3$.

(c) Une configuration centrale dans $\mathbb{R}^\nu$ l'est aussi dans $\mathbb{R}^{\nu+k}$.

On s'intéresse ~~[illegible]~~ seulement aux configurations centrales où $r_1, \dots, r_n$ engendrent affinement $\mathbb{R}^\nu$.

$\boxed{\text{Cas } n = 4}$ Reste $\nu = 2$ (cf ci-contre).

Remarque : Si $\nu = 2$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$,

$U^2 I$ homogène de degré 0 et invariante par les rotations du plan.

$\Rightarrow$ fonction sur $(\mathbb{R}^2)^{n-1} / \mathbb{C}^*$ (centre de masse en 0) (invar. par homothéties et rotations)

$$\overset{\parallel}{\mathbb{C}P^{n-2}}$$

$n=4$: On doit extrémiser une fonction sur $\mathbb{C}P^2$.

Il reste encore 4 dimensions terribles :

Appelons configuration affine une classe d'équivalence de configurations sous le groupe affine de $\mathbb{R}^\nu$.

L'espace des configurations affines :

$r_1, \dots, r_n$ fixés. Configuration déterminée par l'ensemble $\left\{ (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum \mu_i r_i = 0 \\ (*) \; \sum \mu_i = 0 \end{array} \right\}$

Qui est un sous-espace de $\mathbb{R}^{n-1}$ de dimension $n - \nu - 1$.
$\mathbb{R}^n(\sum \mu_i = 0)$

en effet, si $r_1, \dots, r_{\nu+1}$ forment une base affine de $\mathbb{R}^\nu$, ———

Donc l'espace des configurations affines est la grassmannienne

$$G_{n-1}^{n-\nu-1}$$

Si $\nu=2$, $n=4$: $G_3^1 = \underline{\mathbb{R}P^2}$.

(La configuration affine est déterminée par les λ_i à homothétie près t.q.

$\lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_4 r_4 = 0$, $\Sigma \lambda_i = 0$.

Bien sûr, U et I pas invariants par le groupe affine,

mais si $x_{ij} = r_{ij}^2$

$$U + \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \sum_{i<j} \mu_{ij} \left(x_{ij} + \frac{2}{x_{ij}^{1/2}} \right)$$

convexe en les $x_{ij} \geq 0$ considérés comme indépendants $\left((\mathbb{R}^{+*})^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)$.

Soit $\mathcal{S} = \{$matrices symétriques des $M_\nu(\mathbb{R})\}$
$= \{$métriques euclidiennes sur $\mathbb{R}^\nu\}$.

Soit C une configuration affine

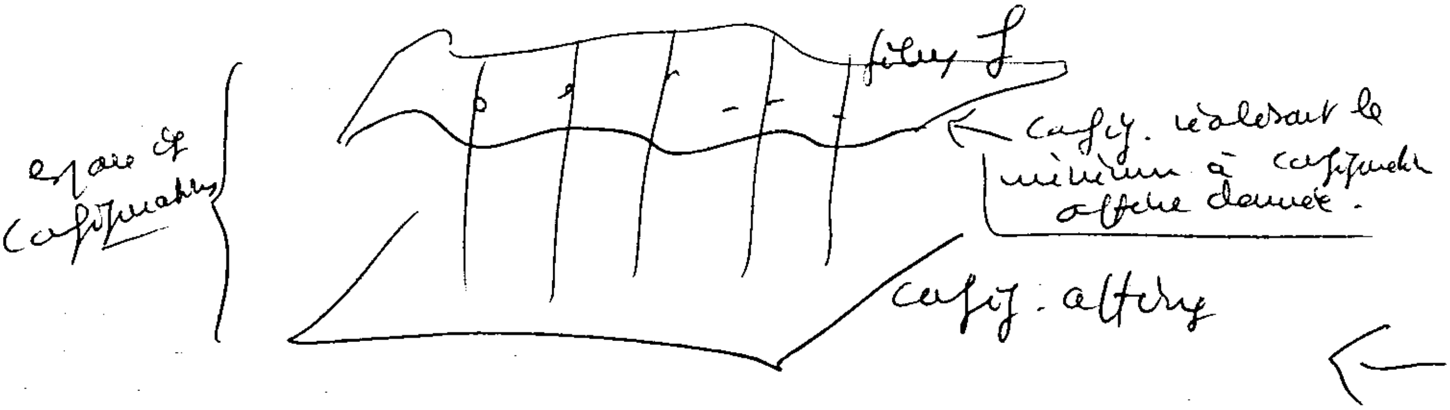
$\exists$ appl. linéaire

$$X_C : \mathcal{S} \xrightarrow{\text{linéaire}} \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$M \longmapsto x_{ij}$$

carré des distances pour la métrique définie par M

On se restreint aux M $\ni$ les $x_{ij} > 0$
(contient les M déf. >0)

(L'image de X_C est un k espace de dimension $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$).



dans chaque fibre $U+\frac{1}{2}I$ est convexe

$\Rightarrow \exists$ section de ce fibré

$$G_{n-1}^{\,n-\nu-1} \xrightarrow{\text{algébrique}} G_{\frac{n(n-1)}{2}}^{\,\frac{\nu(\nu+1)}{2}}$$

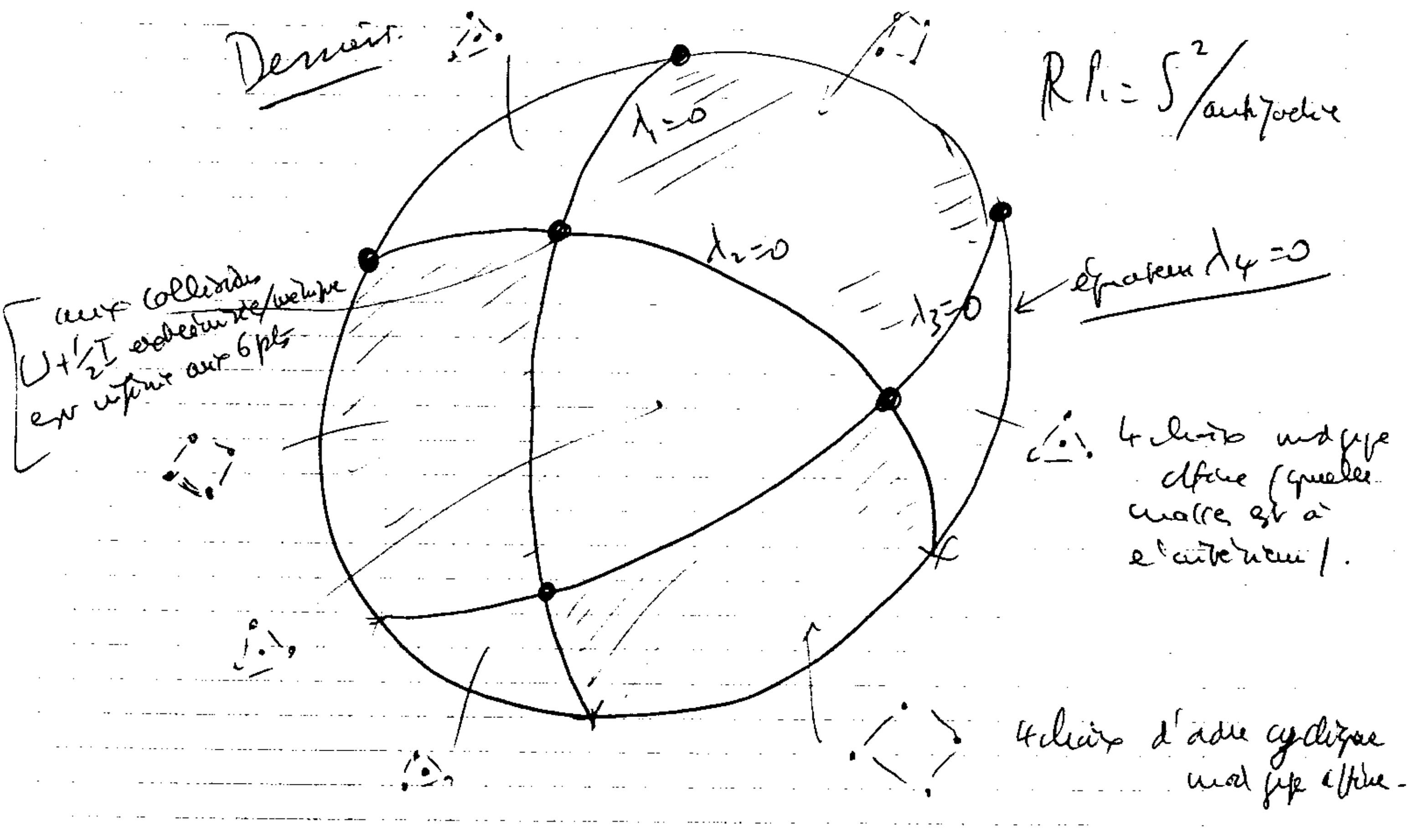
config. affine

carré des distances. (image X_c)

($= x_{ij}$ [illegible])

Dessin:

$RP_2 = S^2/\text{antipodie}$



Sur le sous espace linéaire des x_{ij} (image de X_c),

$U+\frac{1}{2}I$ convexe $\Rightarrow$ 1! pt critique associé à C.
(minimum non dégénéré).

Conclusion : Toutes les dimensions → dépendent de la métrique sont triviales du pt de vue des conf. centrales.

Pour $n=4$, $\nu=2$ on se ramène donc à extrémiser une fonction sur un espace $\mathbb{RP}^2$
(mais on a perdu les formules explicites).
($U+\frac{1}{2}I$ extrémale / à la métrique)

Corollaire : 2 configurations centrales des n corps sont affinement distincts.

ex : 1 seul losange formé à symétrie près etc...

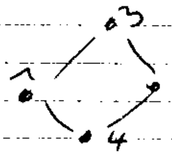
$$\boxed{n=4,\ \nu=2}$$

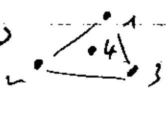
$(\lambda_1,\dots,\lambda_4)$ à homothétie près $=$ 1 pt de $\mathbb{RP}^2$
$\sum \lambda_i = 0$
(avec $\lambda_1 r_1+\dots+\lambda_4 r_4=0$)

$\lambda_1=0 \iff \lambda_2 r_2+\lambda_3 r_3+\lambda_4 r_4=0$ ($\sum\lambda_i=0$) $\iff$ m_2, m_3, m_4 alignés

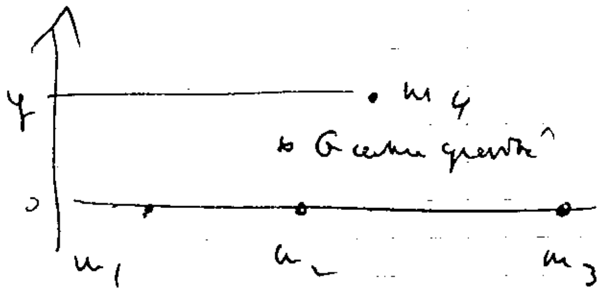
$\left.\begin{array}{l}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{array}\right\} \iff r_3=r_4$ (collision m_3, m_4).

(6 collisions)

3 conv : par ex $\lambda_1,\lambda_2>0$ et $\lambda_3,\lambda_4<0 \iff$  convexe

4 triangles : par ex $\lambda_4>0$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3<0 \iff$ 

Démonstration :



proj. des ~~forces~~ accélérations sur l'axe vertical (exercés sur m_1, m_2, m_3)

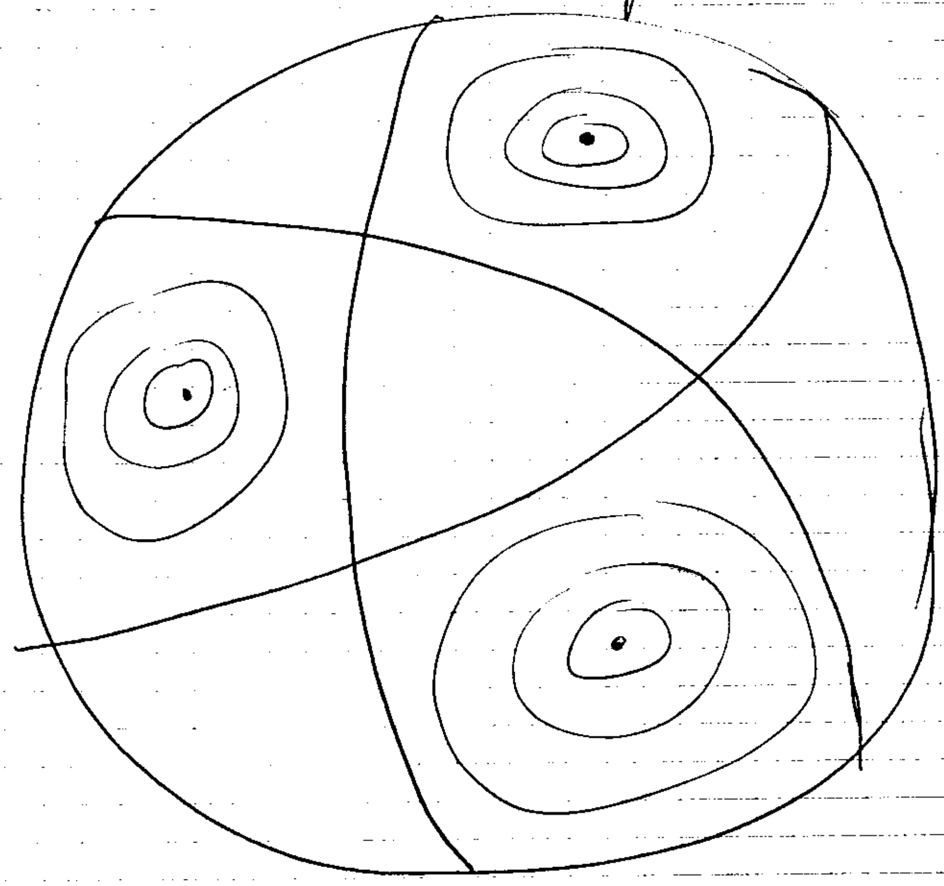
$$\frac{1}{m_1}\frac{m_1 m_4}{r_{14}^3}\, y \;,\; \frac{1}{m_2}\frac{m_2 m_4}{r_{24}^3}\, y \;,\; \frac{1}{m_3}\frac{m_3 m_4}{r_{34}^3}\, y$$

$$\lambda m_4 y \qquad \lambda m_4 y \qquad \lambda m_4 y$$

$\Rightarrow r_{14} = r_{24} = r_{34}$ puis [illegible] cqfd.

(si 3 masses $\neq 0 \Rightarrow$ Lagrange $\triangle$) .

Conjecture



Dénombrement : • On a 12 équilibres de Moulton ($24/2_{\text{symétrie}} = 12$).

• 6 cas convexe (= 3 mod symétrie)

• 8 cas non convexes (= 4 mod symétrie).

bien répartis car

Lemme : Pas de pts critiques sur les droites $\lambda_i = 0$ (i.e. 3 masses égales mais pas la quatrième).

Conjectures

On cherche donc les pts critiques dans les différents domaines et leurs bifurcations.

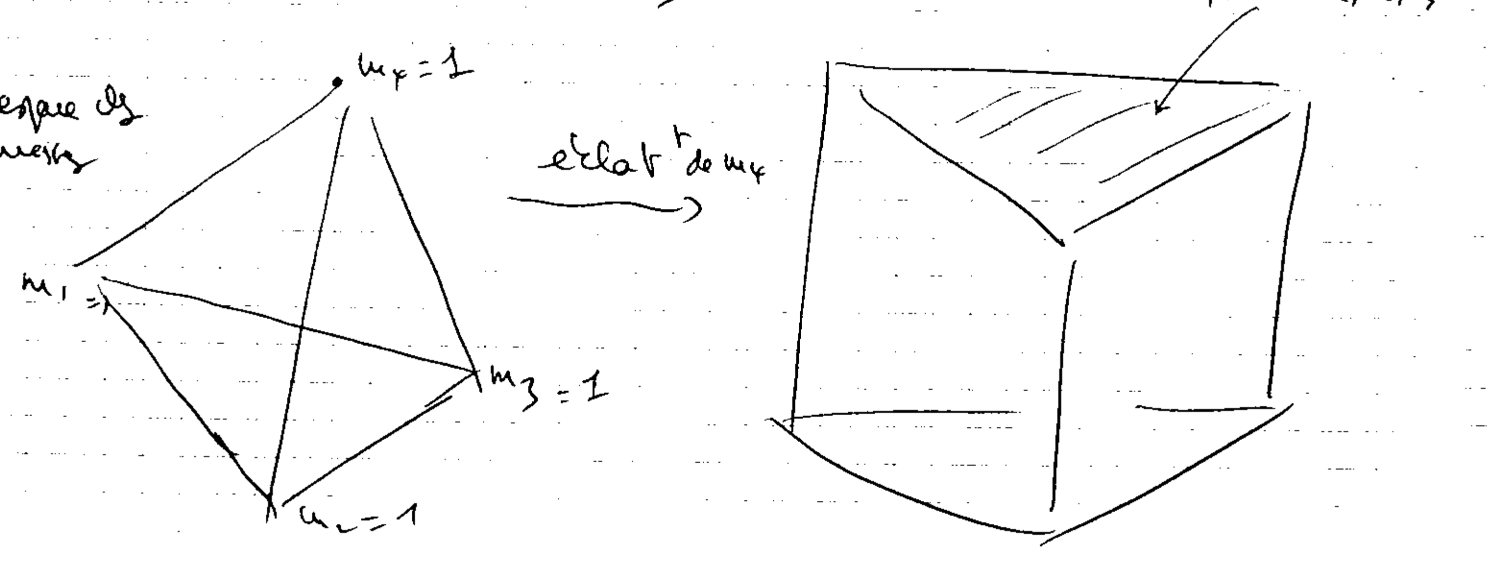
① Cas convexe :

1 pt critique dans chaque carré ∀ masses (minimum non dégénéré) (i.e. pas de bifurcation)

(⇒ 6 configurations $3!/2$)

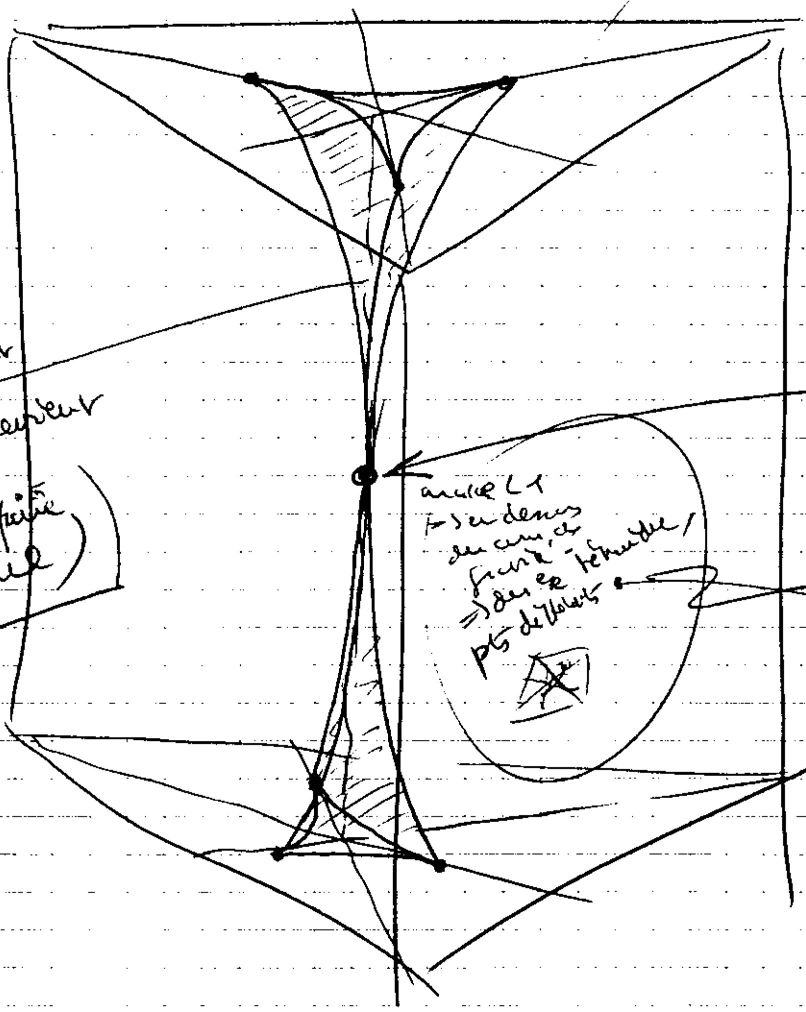
② Cas non convexe : Il y a des bifurcations suivant les masses.

par ex



Conjecture : ? tester par déformation
OK si configuration stable —

médians

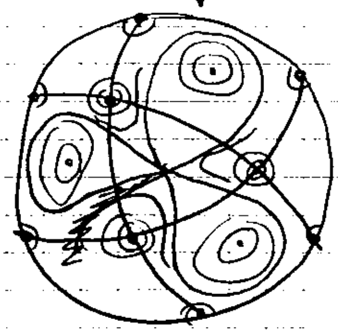


Si on parcourt l'axe, un max devient min (on peut faire le calcul)

avec L+ + 3 sur deux des arcs de fronce tétraèdre / ⇒ 3 der ex pts de Maxwell

on connaît ce point ! selle de singe

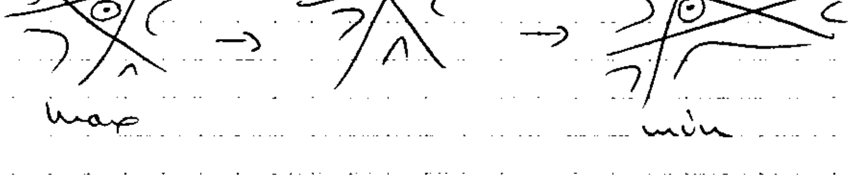
~~d'ordre~~



ombilic elliptique

(ou 2 selles, ou 3 selles + max ~~ou~~ min).

sur l'axe de symétrie :



Dans tout le cas on a la symétrie du triangle équilatéral ⇒ le diagramme de bifurcation l'a aussi.

- Si 4 masses égales, on obtiendrait 50 configurations centrales.

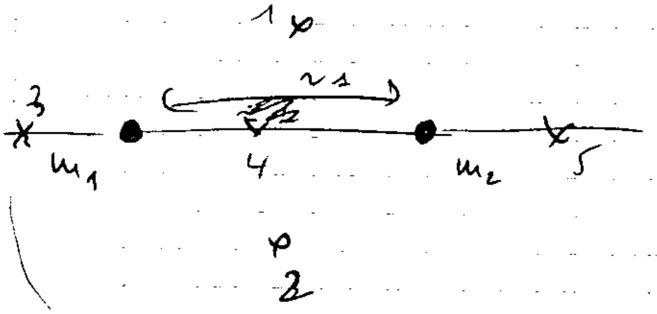
  Si $m_1, m_2 \gg m_3, m_4$ —— 34 ——

Cas limite

$\boxed{1}$ **Prop** : Si $m_1, m_2 \gg m_3, m_4$, il y a 34 configurations centrales.

L'interaction entre m_3 et m_4 est négligeable par rapport aux autres, et l'interaction entre m_1 et m_2 domine. (si m_3, m_3 pas à la même position).

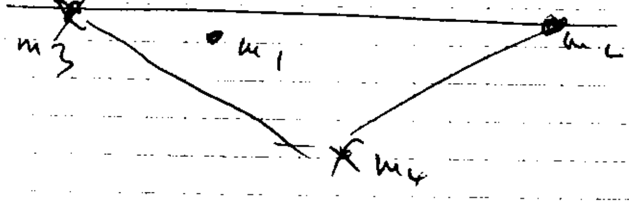
Rappel $U + \frac{I}{2} = \sum_{i<j} \mu_{ij} \left(\frac{1}{2} r_{ij}^2 + \frac{1}{r_{ij}}\right)$: le terme dominant est $\mu_{12}\left(\frac{1}{2} r_{12}^2 + \frac{1}{r_{12}}\right)$. Il faut donc $r_{12} \simeq 1$. (min de cette fonction).



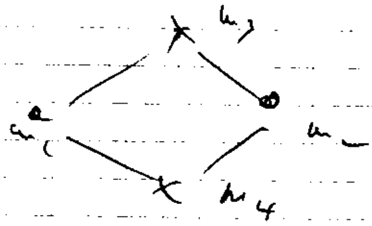
m_3, m_4 doivent être à des une des 5 positions d'équilibre relatif de 3 corps. 1, 2, 3, 4, 5.

$\boxed{1}$ m_3, m_4 ne sont pas à la même position.

On vérifie qu'on a pas ex :

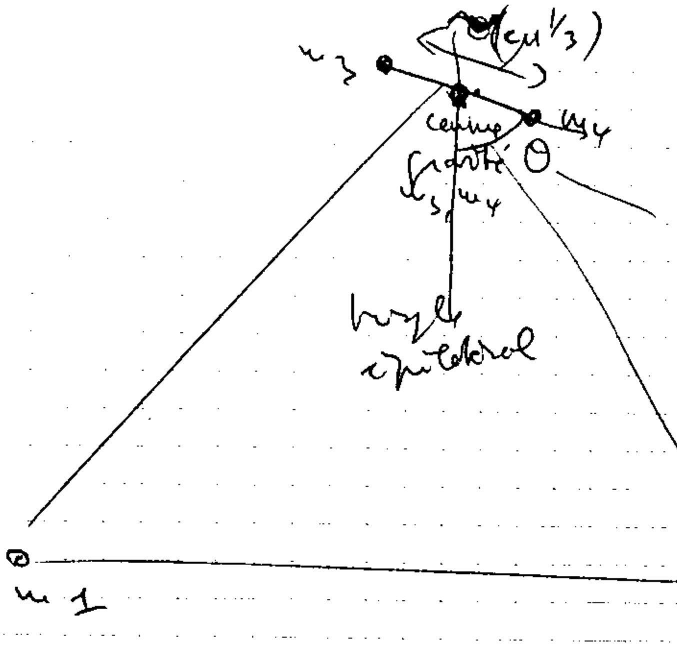


ou

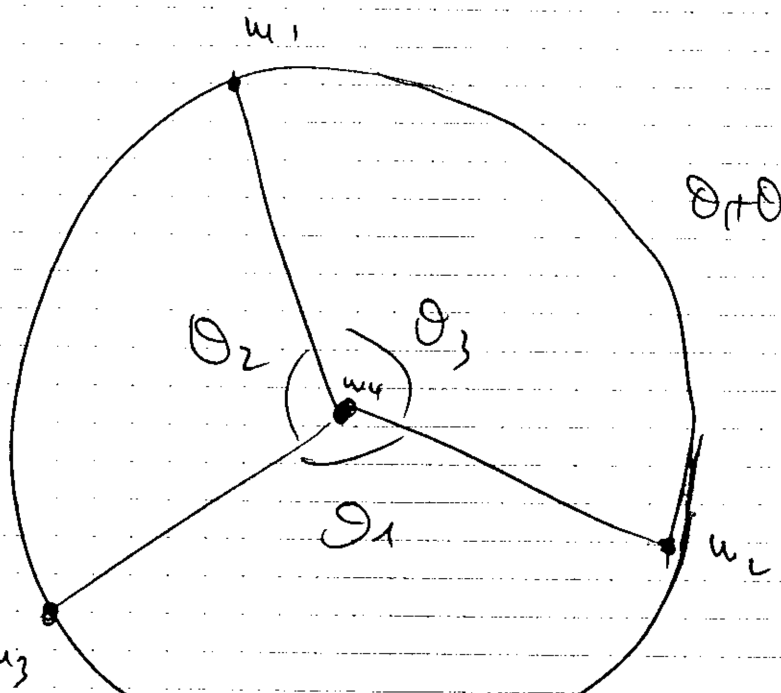


On compte ⇒ OK.

où $\mu = m_3 + m_4$.



$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{3}\,(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}$$



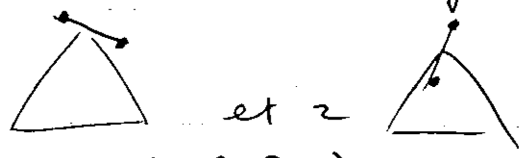
$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$

$\boxed{K2}$ m_3, m_4 ~ en position.

Un calcul simple montre que

1) si en position Euler ⇒ équilibre de dimension correspondant.

2) Si en position de Lagrange ~~est~~ concentre –
⇒ 4 positions.



2 et 2

(en θ)

i.e. 2 convexes et 2  .

<u>Conclusion</u> : la figure de bifurcation est vraie près des arêtes (mais pas trop près des sommets)

$\boxed{III}$ <u>$m_1, m_2, m_3 \ll m_4$</u> :

On regarde termes dominants dans $V + \frac{1}{2} I$: ⇒

$r_{13} \simeq r_{12} \simeq r_{14} \simeq 1$ car indép. et il faut minimiser les $\frac{1}{2} r_{12}^2 + \frac{1}{r_{12}}$ etc. –

⇒ problème à 2 dimensions directement étudiable. (on peut oublier la masse m_4 ~~[illegible]~~)

On extrémise $V = \sum_{i<j} m_i m_j \left(\frac{1}{2} r_{ij}^2 + \frac{1}{r_{ij}} \right)$

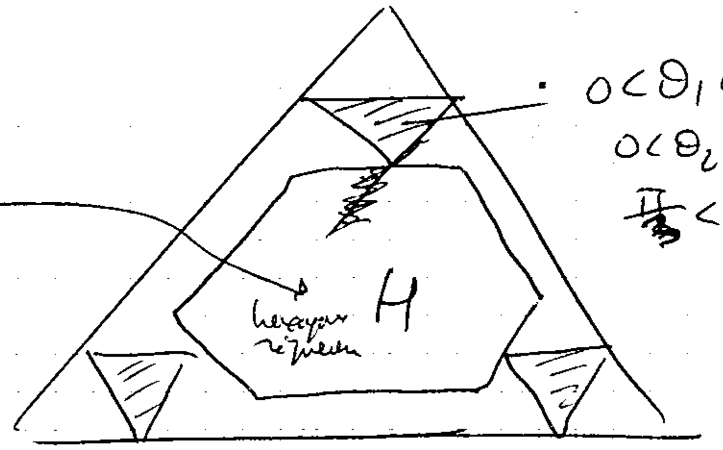
avec
$$\begin{cases} r_{ij} = 2 \sin \frac{\theta_i}{2} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi \end{cases}$$

correspond « distance 1 »

$\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \pi$

$\frac{\pi}{3} < \theta_2 < \pi$

$\frac{\pi}{3} < \theta_3 < \pi$

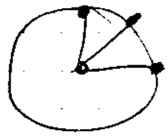


$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$

$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{3}$

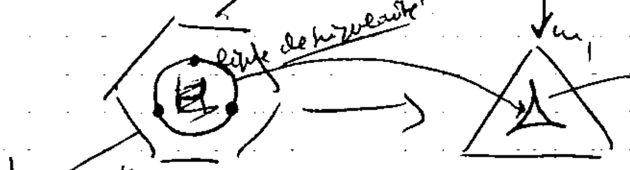
$\frac{\pi}{3} < \theta_1 + \theta_2$

$\Rightarrow$ configurations convexes par ex



espace $\left[\begin{array}{l} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi \\ \theta_i > 0 \\ \text{(choix de classe).} \end{array} \right.$

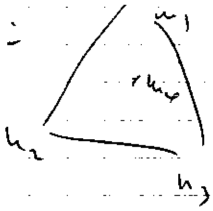
degré 2



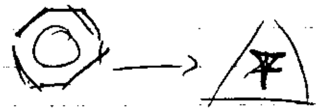
bijection des marques (mais m_4).

$\Rightarrow$  supérieur

Étant donné une configuration, il y a au plus 1 choix de marques)

 inférieur : 

au éclaté les sommets $\Rightarrow$ hexagone et un type d'oblitération.



On ne sait pas faire beaucoup : voici ci-contre.

? généralisations à $\nu = n-2$

Formellement tout a un sens –