Description conjecturale des configurations centrales dans le problème planaire des 4 corps.

J. C. Yoccoz

1. Configurations centrales.

1.1 Définitions et notations.

Soient ν un entier ≥ 1, n un entier ≥ 2, $m_1, \dots, m_n$ des masses ponctuelles (avec $\sum m_i = 1$), de positions respectives $r_1, \dots, r_n$ dans $\mathbb{R}^\nu$. On pose : $r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}^\nu)^n$. On définit

$$\Delta_{ij} = \{ r \in (\mathbb{R}^\nu)^n, \; r_i = r_j \}$$

$$\Delta = \bigcup_{i<j} \Delta_{ij}$$

$$r_{ij} = \| r_i - r_j \| \quad , \quad R_{ij} = r_{ij}^2$$

$$U(r) = \sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^{-1} \qquad , \qquad r \in (\mathbb{R}^\nu)^n - \Delta .$$

$$I(r) = \frac{1}{2} \sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^2$$

On note O le groupe $O(\mathbb{R}^\nu)$, O^+ le sous-groupe $SO(\mathbb{R}^\nu)$, A le groupe affine de $\mathbb{R}^\nu$, ~~A^+ le sous-groupe préserva~~ H le groupe des homothéties centrées en 0, T le groupe des translations, G (resp. G^+) le groupe engendré par O (resp. O^+) et H. Ces groupes agissent sur $(\mathbb{R}^\nu)^n$.

Définitions. Une configuration est un point de $(\mathbb{R}^\nu)^n - \Delta$; une configuration est centrée si $\sum m_i r_i = 0$; une configuration conforme est une orbite pour l'action de G^+ sur l'espace des configurations centrées. Une configuration affine est une orbite de l'action de A dans l'espace des configurations.

<u>Définition</u> : Une configuration est <u>centrale</u> s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'on ait, pour $1 \leq i \leq n$

$$\lambda m_i r_i = -\operatorname{grad}_i U(r) = \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{r_i - r_j}{r_{ij}^3}$$

1.2 Toute configuration centrale est centrée. Si r est centrale et $g \in G$, $g.r$ est centrale.

Les conditions suivantes sur la configuration centrée r sont équivalentes.

(i) r est centrale

(ii) r est point critique de $U I^{1/2}$

(iii) r est point critique de la restriction de U (resp. I) à l'hypersurface $I(s) = I(r)$ (resp $U(s) = U(r)$)

(iv) il existe $h \in H$ tel que hr soit point critique de $F = U + I$.

Le principal problème ouvert est le suivant :

<u>Conjecture</u> : Pour toutes valeurs des masses, il n'y a qu'un nombre fini de configurations conformes centrales.

<u>Définition</u> Une configuration r est <u>génératrice</u> si $r_1 \cdots r_n$ engendrent $\mathbb{R}^\nu$ comme espace affine. On a alors $n \geq \nu + 1$.

<u>Lemme</u> (trivial). Les configurations centrales contenues dans $\mathbb{R}^{\nu-1}$ sont les configurations centrales de $\mathbb{R}^{\nu-1}$.

On pourra donc se limiter ~~aux con~~ à l'étude des configurations génératrices, en supposant en particulier qu'on a $1 \leq \nu \leq n-1$.

Les seuls cas complètement élucidés, qui sont très élémentaires, sont $\nu = 1$ et $\nu = n-1$.

1.3 Configurations colinéaires (Euler-Moulton) : le cas $\nu = 1$.

L'espace des configurations possède $n!$ composantes connexes ; supposons par exemple qu'on ait $r_1 < \cdots < r_n$. On a alors

$$r_{ij} + r_{jk} = r_{ik} \qquad \text{si} \quad i < j < k ;$$

réciproquement la donnée de $\frac{n(n-1)}{2}$ nombres $x_{ij} > 0$ soumis aux relations ci-dessus détermine une configuration centrée unique.

Dans l'octant $\mathcal{U} = \{x = (x_{ij})_{1 \le i < j \le n},\ x_{ij} > 0\}$ de $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

la fonction $F(x) = \sum_{i<j} m_i m_j \left(\frac{1}{2} x_{ij}^2 + x_{ij}^{-1}\right)$ est strictement convexe et propre. Sa restriction au sous espace linéaire déterminé par les relations ci-dessus a les mêmes propriétés, en particulier un unique point critique qui est un minimum non dégénéré.

En conclusion, chaque composante connexe de l'espace des configurations contient exactement une configuration conforme centrale.

1.4. Le cas $\nu = n-1$ (Lagrange)

Si $r = (r_1, \dots r_n)$ est génératrice et point critique de $F(r) = \sum_{i<j} m_i m_j \left(\frac{1}{2} r_{ij}^2 + r_{ij}^{-1}\right)$, on doit avoir $r_{ij} = 1$ pour tous $1 \le i < j \le n$ car les r_{ij} sont des variables indépendantes au voisinage de r. On obtient donc deux (à cause de l'orientation) configurations conformes centrales où les masses sont aux sommets d'un simplexe régulier.

1.5. Configurations affines.

On suppose qu'on a $1 \le \nu \le n-1$. Notons $\mathcal{C}$ l'~~espace~~ ouvert de $(\mathbb{R}^\nu)^n$ formé des configurations génératrices, Q l'espace des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^\nu$, Q^+ l'ouvert ~~sous espace~~ des formes quadratiques définies positives.

Soit $r \in \mathcal{C}$; on pose :

$$\Sigma = \{\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum \lambda_i = 0\}.$$

$$u_r : \Sigma \to \mathbb{R}^\nu \qquad u_r(\lambda) = \sum \lambda_i r_i$$

$$J_r = \operatorname{Ker} u_r .$$

$$q_r : Q \to \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad q_r(T) = \left(T(r_i - r_j)\right)_{1 \le i < j \le n}$$

$$L_r = \operatorname{Im} q_r$$

Comme r est génératrice, u_r est surjective et q_r est injective. De plus, pour $r, r' \in \mathcal{C}$, on a $J_r = J_{r'}$ si et seulement si r et r' appartiennent à la même orbite de l'action de A.

Le quotient $\mathcal{C}/A$ s'identifie donc (via l'application $r \to J_r$) à un ouvert dense de la grassmannienne $G^{n-1}_{n-1-\nu}$. De même L_r ne dépend que de l'orbite de l'action de A.

Considérons le fibré : $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ G^{n-1}_{n-1-\nu} \end{array}$, sous-fibré du fibré trivial $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \times G^{n-1}_{n-1-\nu}$ dont la fibre en la classe de r est L_r. Notons E^+ l'ouvert de E qui est égal à $(\mathcal{U} \times G^{n-1}_{n-1-\nu}) \cap E$ (cf 1.3), et E^{++} l'ouvert de E qui coupe la fibre en la classe de r suivant $q_r(Q^+)$.

On a $E^{++} \subset E^{+}$. L'espace des configurations conformes s'identifie à deux copies de E^{++} (orientation). La fonction

$$F(x_{ij}) = \sum_{i<j} m_i m_j \left(\tfrac{1}{2} x_{ij} + x_{ij}^{-1/2} \right)$$

est strictement convexe et propre sur ~~[illegible]~~ dans $\mathcal{U}$, donc sa restriction à $L_r \cap \mathcal{U}$ (pour tout $r \in \mathcal{C}$) a les mêmes propriétés, en particulier possède un unique point critique qui est un minimum non dégénéré.

On a vu que $\mathcal{C}/_A$ s'identifie à un ouvert dense $\mathcal{V}$ de $G^{n-1}_{n-1-\nu}$, plus précisément au complémentaire dans $G^{n-1}_{n-1-\nu}$ de $\frac{n(n-1)}{2}$ sous-variétés de codimension ν (correspondant à $r_i = r_j$). La fonction sur $\mathcal{V}$ qui associe à r le minimum de F dans $L_r \cap \mathcal{U}$ est analytique réelle et il s'agit de déterminer ses points critiques.

Remarque. L'avantage de cette "réduction affine" est qu'elle permet de passer de l'espace des configurations conformes (de dimension $(n-1)\nu - \frac{\nu(\nu-1)}{2} - 1$) à la grassmannienne $G^{n-1}_{n-1-\nu}$ (de dimension $\nu(n-1-\nu)$) donc de limiter la complexité (du point de vue de la théorie des singularités) des points critiques rencontrés. Le gros inconvénient de cette réduction est qu'elle n'est pas explicite : la fonction considérée sur la grassmannienne n'est plus donnée par une formule explicite. Il faut aussi vérifier que tous les points critiques de F dans E^{+} se trouvent dans E^{++} (ou déterminer s'ils le sont...)

1.6. Exemple. le cas $n=4$, $\nu=2$.

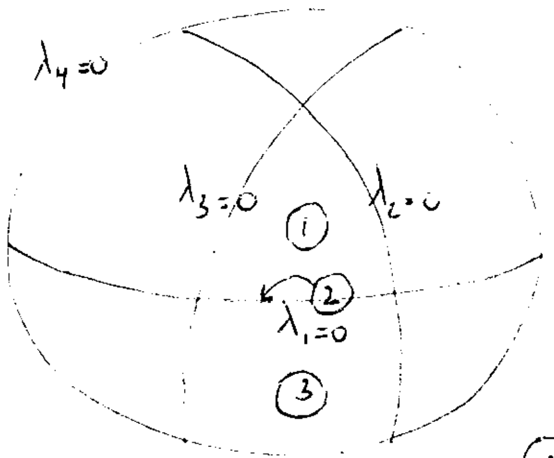
D'après 1.3, 1.4 c'est le premier cas non trivial.

L'espace des configurations conformes s'identifie à $\mathbb{C}P^2$ privé de 6 droites (en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, G^+ s'identifie à $\mathbb{C}^*$, et on a $\sum m_i r_i = 0$; les six droites correspondent aux Δ_{ij}).

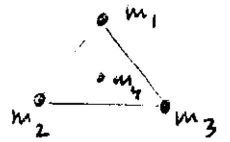
La réduction affine permet de se ramener à $\mathbb{R}P^2$ $(= G_1^3)$ privé de 6 points, et plus précisément à l'espace projectif $\mathbb{P}(\Sigma)$ privé de 6 points (où $\Sigma = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \sum \lambda_i = 0$

Les droites $\lambda_i = 0$ dans $\mathbb{P}(\Sigma)$ définissent une décomposition cellulaire dont l'interprétation géométrique est facile ; par exemple :

$\mathbb{P}(\Sigma)$ (on identifie les points antipodaux du cercle extérieur)

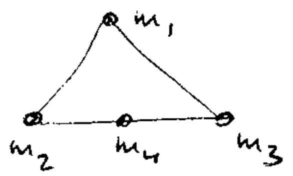


1 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 < 0$: la masse m_4 est à l'intérieur du triangle formé par les trois autres (cas triangulaire)



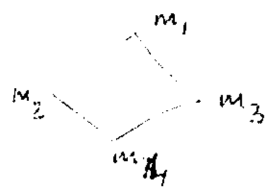
2 $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 < 0, \lambda_1 = 0$

m_4 est sur le segment $m_2 m_3$: (cas aligné)



(3) $\lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0,\ \lambda_1 < 0,\ \lambda_4 < 0$

le quadrilatère formé par les masses est convexe, les λ_i de même signe correspondent à des sommets opposés.

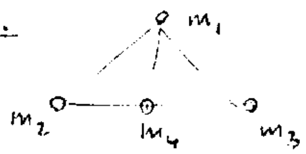


Cas convexe.

2. Description conjecturale des configurations centrales. ($n=4$, $\nu=2$)

2.1 Lemme. Une configuration centrale (génératrice) n'est jamais alignée.

Démonstration.



Un mouvement transverse au segment m_2m_3 de la masse m_i $(i=2,3,4)$ fait varier au premier ordre la distance r_{i1} sans affecter (au premier ordre) les autres distances. Si r est point critique de

$$F(r) = \sum_{i<j} m_i m_j \left(\tfrac{1}{2} r_{ij}^2 + r_{ij}^{-1}\right),$$ on a donc

$r_{12} = r_{13} = r_{14} = 1$, une impossibilité. ☒

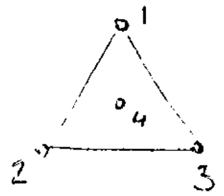
2.2 Equation du lieu des configurations centrales (lorsque les masses varient) (cf Moeckel).

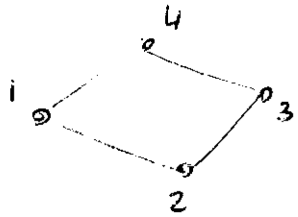
Une configuration génératrice qui est point critique de F vérifie:

$$(1 - r_{12}^{-3})(1 - r_{34}^{-3}) = (1 - r_{13}^{-3})(1 - r_{24}^{-3}) = (1 - r_{14}^{-3})(1 - r_{23}^{-3})$$

(C'est un calcul facile).

L'espace des configurations centrales non alignées est constitué par 8 composantes connexes triangulaires (choix de la masse au centre + orientation du triangle) et 6 composantes connexes convexes (ordre des masses rencontrées à partir de m_1). Par le lemme de 2.1, il suffit d'étudier 1 composante connexe triangulaire et 1 composante connexe convexe (les points critiques de F ne pouvant changer de composante connexe lorsque les masses varient). On étudiera par exemple

(A) 

(B) 

Dans le cas (A), une configuration centrale point critique de F vérifie $r_{12}, r_{13}, r_{23} > 1$ et $r_{14}, r_{24}, r_{34} < 1$. Dans le cas (B), on a $r_{12}, r_{23}, r_{34}, r_{41} < 1$ et $r_{13}, r_{24} > 1$.

2.3 Quelques situations particulières.

2.3.1 Situation équilatérale. (cf Palmore).

On suppose qu'on a $m_1 = m_2 = m_3 = m < 1/3$, $m_4 = \mu = 1-3m$; la configuration où m_1, m_2, m_3 sont au sommet d'un triangle équilatéral, et m_4 à son centre, est centrale (pour des raisons de symétrie), et point critique de F pour un bon choix du côté du triangle : si a est ce côté, on a :

$$F(r) = 3m^2(a^{-1}+\tfrac{1}{2}a^2) + 3m\mu\left[\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^{-1} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{3}\right]$$

$$= 3m\left\{a^{-1}(m+\sqrt{3}\mu) + \frac{1}{2}a^2\left(m+\frac{1}{3}\mu\right)\right\}$$

d'où $a^3 = \dfrac{m+\sqrt{3}\,\mu}{m+1/3\,\mu}$ (on a bien $1 < a < \sqrt{3}$)

En plaçant l'origine en m_4 on a $\sum_{i=1}^{3} r_i = 0 = r_4$. Pour étudier les configurations voisines, choisissons pour "coordonnées" de déformation affine les réels x_1, x_2, x_3 tels que $\sum_{i=1}^{3} x_i r_i = r_4$ et $\sum x_i = 0$, tout en continuant à imposer $\sum_{i=1}^{3} r_i = 0$.

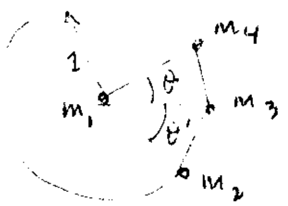
En minimisant F dans chaque fibre de E^+, on obtient une fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ qui prend la forme (pour raisons de symétrie)

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = b(m) \sum x_i^2 ,$$

et on peut vérifier (par un calcul assez long!) que b a un seul zéro, simple, dans $[0, \frac{1}{3}]$. Lorsque m prend cette valeur, la configuration centrale correspondante est point critique dégénéré de F.

2.3.2 Premier cas dégénéré. $m_1 \to 1$.

On suppose la masse m_1 infiniment plus lourde que les autres. On aura alors $r_{12} = r_{13} = r_{14} = 1$, si r est un point critique de F.



On pose $\mu = m_4 m_3^{-1}$, $\mu' = m_2 m_3^{-1}$

Ⓐ Dans le cas convexe, on doit avoir

$$0 < \theta < \pi/3, \quad 0 < \theta' < \pi/3, \quad \theta + \theta' > \pi/3$$

(car $r_{24} > 1$, $r_{23}, r_{34} < 1$), et la fonction F dégénère en:

$$\tilde{F} = \mu f(\theta/2) + \mu' f(\theta'/2) + \mu\mu' f\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right), \quad \text{avec}$$

$$f(x) = 2\sin^2 x + (2\sin x)^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{(8\sin^3 x - 1)\cos x}{2\sin^2 x}$$

Pour une configuration centrale, il existe donc $c>0$ tel qu'on ait:

$$\mu^{-1} = -cf'(\theta/2) = m_3\, m_4^{-1} = \frac{m_3}{m_2 m_4}\, m_2$$

$$\mu'^{-1} = -cf'(\theta'/2) = m_3\, m_2^{-1} = \frac{m_3}{m_2 m_4}\, m_4$$

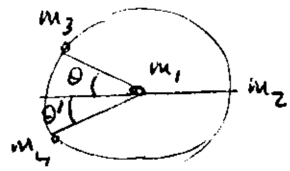
$$(\mu\mu')^{-1} = c\, f'\left(\tfrac{\theta+\theta'}{2}\right) = m_3^2\, m_2^{-1} m_4^{-1} = \frac{m_3}{m_2 m_4}\, m_3$$

Or on a $f'(\theta/2) = 0$ pour $\theta = \pi/3$, $f'(\theta'/2) = 0$ pour $\theta' = \pi/3$ et $f'\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right) = 0$ pour $\theta+\theta' = \pi/3$.

Les formules ci-dessus expriment qu'à une configuration du type envisagé correspond exactement un choix de masses (relatives) de m_2, m_3, m_4 de façon que cette configuration soit centrale. Cette correspondance envoie le bord du triangle des configurations (i.e $\theta = \pi/3$, $\theta' = \pi/3$, $\theta+\theta' = \pi/3$) sur le bord du triangle des masses ($m_2 = 0$, $m_4 = 0$, $m_3 = 0$) et on vérifie sans peine qu'elle n'a pas de points critiques. (il faut vérifier qu'on ne peut avoir $\frac{f'}{f''}(x) + \frac{f'}{f''}(x') = \frac{f'}{f''}(x+x')$ pour $0 < x, x' < \pi/6$, $x +$ ~~$x' > \pi/6$, or f'/f'' est négative sur $[0, \pi/6]$, positive~~ $x+x' > \pi/6$, ce qui se fait sans mal avec une calculette).

En conclusion il existe dans ce cas 1 seule configuration convexe.

(B) dans le cas triangulaire, les conditions sont :

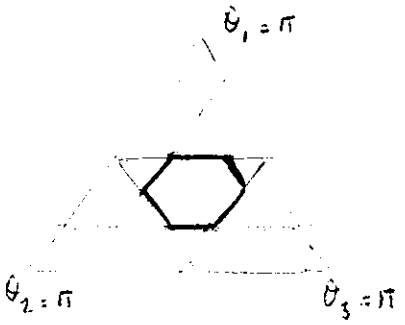


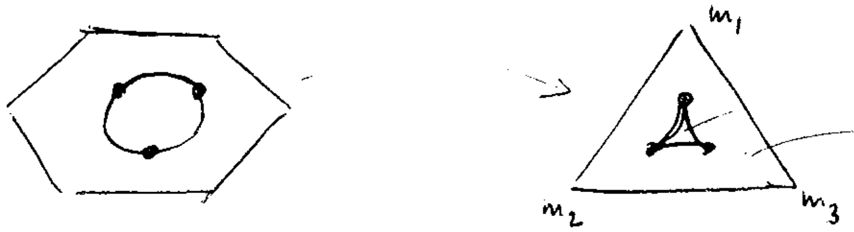
$$\pi/3 < \theta+\theta' < \pi, \qquad 0 < \theta, \theta' < 2\pi/3$$

ou encore (en posant $\theta_1 = \theta/2$, $\theta_2 = \theta'/2$, $\theta_3 = \pi - \frac{\theta+\theta'}{2}$:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi, \qquad \pi/6 < \theta_i < \pi/2$$

qui définit un hexagone. On a de nouveau une application analytique qui envoie l'hexagone admissible sur le triangle des masses, et le bord sur le bord (avec degré 2), mais cette fois ci l'application a une courbe lisse de points critiques, qui sont du type pli sauf trois d'entre eux qui sont des cusps. (A vrai dire je ne l'ai que partiellement vérifié par calculette). Le diagramme suivant montre points et valeurs critiques, ainsi que le nombre d'antécédents :





Dans l'espace des configurations affines (i.e $\mathbb{P}^q(\Sigma)$) on a soit deux selles critiques, soit 3 selles et un maximum (soit, sur l'image du lieu critique, des singularités non de Morse).

2.3.3. Lorsque m_1, m_2 sont beaucoup plus grands que m_3, m_4 on peut traiter complètement la situation par le calcul. On obtient :

- pour chaque cellule convexe de configurations affines, une configuration centrale qui est un minimum non dégénéré
- pour chaque cellule triangulaire, deux selles non dégénérés.

Les singularités sont toujours de Morse dans ce cas ; il n'y a pas de bifurcations.

2.3.4 Lorsque m_1, m_2, m_3 sont beaucoup plus grands que m_4, ces masses occupent une des configurations centrales à 3 corps. Colinéaire (Euler) (et la quatrième masse ne peut être sur cette droite) ou équilatérale (Lagrange). On retrouve le même type de discussion qu'en 2.3.2, sans bifurcations dans le cas convexe (il y a toujours exactement un point critique, minimum non dégénéré dans chaque cellule), et une ligne de plis avec 3 cusps dans le cas triangulaire, lorsque la masse m_4 se trouve à l'intérieur du triangle équilatéral formé par les trois autres masses.

2.4 Description conjecturale des configurations centrales et de leurs bifurcations.

2.4.1 Le cas convexe.

Conjecture 1. Il y a toujours exactement 1 configuration centrale par cellule convexe, qui est minimum non dégénéré de F dans $\mathbb{P}(\Sigma)$.

2.4.2 Le cas triangulaire. Considérons la situation (A)

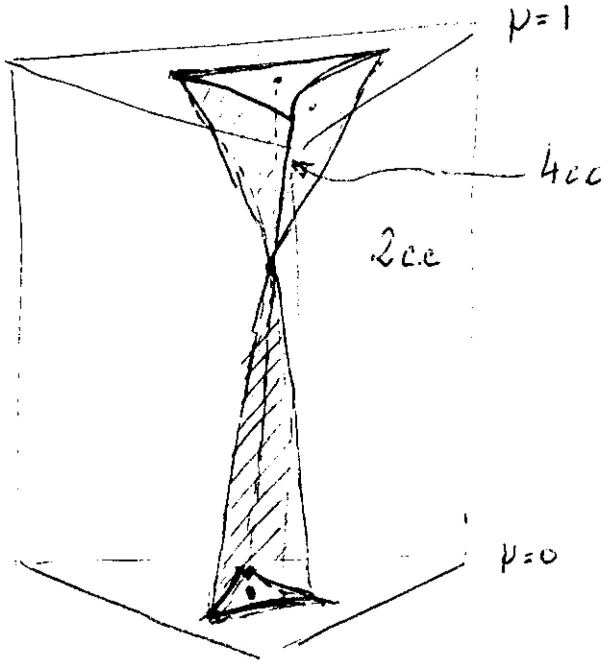
~~Conjecture 2.~~ Nous commençons par changer légèrement l'intitulé des paramètres masses en posant :

$$\mu = m_4 , \qquad \mu_i = \frac{m_i}{1-\mu} \quad \text{pour } 1 \le i \le 3$$

et travaillons dans le prisme compact $\{0 \le \mu \le 1,\ \mu_i \ge 0,\ \Sigma \mu_i = 1\}$

Conjecture 2. En considérant F comme une famille à 3 paramètres d'applications analytiques définies dans la cellule (4) de configurations triangulaires affines (donc comme famille à trois paramètres de fonctions de deux variables), F est un déploiement universel de l'ombilic elliptique qui prend place pour ~~la~~ valeurs ~~$(\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ [illegible] ou m est la~~ valeur $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = m$, où m est la valeur critique considérée en 2,4

~~Homme une~~ En dehors d'une hypersurface analytique singulière V il y a soit 4 ~~points~~ configurations centrales (3 selles et 1 maximum, ou 3 selles et un minimum) soit 2 configurations centrales (2 selles)



2.5 Remarques pour conclure.

2.5.1 Suivant le modèle proposé, il y aurait (en incluant de nouveau les configurations collinéaires) entre 34 et 50 configurations conformes centrales pour 4 corps dans le plan.

Il y a en particulier (ceci est vérifiable) 34 configurations lorsque deux des masses sont beaucoup plus lourdes que les deux autres :
- 12 configurations collinéaires
- 6 convexes
- 16 triangulaires

Il y aurait, lorsque les 4 masses sont égales, 50 conf. centrales :
- 12 collinéaires
- 6 convexes
- 32 triangulaires.

Lorsque trois masses sont égales, et d'un ordre de grandeur différent de la quatrième, on aurait 38 conf. centrales
- 12 collinéaires
- 6 convexes
- 20 triangulaires.

2.5.2 Le modèle proposé est, il me semble, le plus simple qui prenne en compte les symétries du problème et les résultats partiels connus. Si ce modèle est conforme à la réalité, il doit être possible de le démontrer à l'aide d'un ordinateur (mais cela demande visiblement des compétences informatiques (que ~~mon~~ je n'ai pas), en effet, le modèle représente une bifurcation générique de singularité (l'ombilic elliptique) et il est stable par petites perturbations (préservant les symétries) ; il n'y a donc à vérifier que des conditions de transversalité dans des espaces de jets, et ceci seulement en un ensemble discret de points, car on dispose d'un bon contrôle des dérivées de n'importe quel ordre des familles de fonctions considérées. Mais je dois reconnaître que ceci est plus facile à dire théoriquement qu'à exécuter pratiquement !