
CAN ONE HEAR THE SHAPE OF A DRUM?

PSC MAT01

2020 – 2021

Résumé

En 1966, M. Kac s'est posé la question suivante : "peut-on entendre la forme d'un tambour?" A mi-chemin entre plusieurs domaines des mathématiques, ce PSC a pour but d'étudier les résultats établis jusqu'alors sur cette question de la rigidité spectrale du Laplacien. Faisant intervenir l'analyse harmonique, l'inégalité isopérimétrique ainsi que les systèmes dynamiques, notre étude tentera d'approfondir les notions soulevées dans la littérature avec comme objectif final de déterminer un résultat quantitatif sur les ellipses de faible excentricité.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Étude de l'article de Kac	5
2.1	Obtention du premier du développement asymptotique en fonction de l'aire de Ω	5
2.2	Obtention du deuxième terme du développement asymptotique en fonction du périmètre de Ω	6
2.3	Annexe	7
2.3.1	Étude de quelques solutions de l'équation de la chaleur	7
2.3.2	Une application de la loi de Weyl	12
2.3.3	La preuve pour le développement du deuxième terme	15
3	Démonstration de la loi de Weyl en dimension n	17
4	Première étude qualitative des travaux de Zelditch-Hezari et d'Avila-de Simoi-Kaloshin	22
4.1	Système dynamique d'une table de billard	22
4.1.1	Introduction	22
4.1.2	Caustique	22
4.1.3	Trajectoires périodiques et intégrables rationnellement	22
4.1.4	Les théorèmes importants de la rigidité d'ellipses.	23
4.1.5	Plan global de la démonstration	24
5	Étude de l'article d'Avila, de Simoi et Kaloshin	26
5.1	Présentation des objectifs et du travail effectué	26
5.2	Notations, coordonnées longueur d'arc et action-angle	26
5.3	Coordonnées de Lazutkin	27
5.4	Sur le contrôle de la variation de longueur d'une trajectoire en q rebond après déformation	27
5.4.1	Lemme 8 : approximation des points de rebonds selon les coordonnées de Lazutkin	27
5.4.2	Proposition 10 : contrôle de la distance entre deux rebonds consécutifs	29
5.4.3	Lemmata 4 et 5 : Contrôle des angles de rebond	29
5.4.4	Lemme 6 et théorème 3 : contrôle de la variation de longueur suite à la déformation	30
5.5	Construction des modes propres de Fourier pour la déformation	31
5.5.1	Lemme 11 : Approximation des points de rebond en coordonnées de Lazutkin	31
5.6	Modes propres de Fourier déformés	32
5.6.1	Lemme 12 : Approximation des fonctions s_q et c_q	33
5.6.2	Proposition 22 : définition des premiers coefficients c_q et s_q , construction de la base de L^2	33
5.6.3	Lemme 24 : construction d'une meilleure ellipse	33
5.7	Théorème principal et résultats obtenus	33
5.8	Annexe	35
5.8.1	Preuve du théorème 3 et lemmes associés	35
5.8.2	Preuve des lemmes conduisant au résultat	42
6	Étude de l'article de Hezari-Zelditch	45
6.1	Présentation du travail et du bilan effectués	45
6.2	L'isospectralité avec une ellipse proche du cercle.	45
6.2.1	Sur le périmètre d'une ellipse.	46
6.2.2	Sur la fonction de courbure d'une ellipse	48
6.2.3	Preuve de la Proposition	53
6.2.4	L'argument de Bootstrap de Melrose	54

6.2.5	Preuve du corollaire	56
6.2.6	Difficultés et travail à mener	57
6.3	Étude de l'application de billard	58
6.3.1	L'angle de « loop »	59
6.3.2	La fonction de « loop » et la fonction de Melnikov	60
6.4	Développement perturbatif de l'application de billard $\hat{\beta}_\tau$	61
6.5	Étude du spectre de longueur	61
6.5.1	Spectre de longueur pour une ellipse quasi-circulaire	67
6.6	Étude de la trace des ondes et de la paramétrisation de Marvizi-Melrose	69
6.6.1	La paramétrisation de Marvizi-Melrose	69
6.7	Longueur spectrale et trace des ondes	70
6.8	Preuve du théorème principal	73
6.9	Annexe	74
6.9.1	Deux inégalités de Poincaré/Sobolev	74
6.9.2	Argument de Bootstrap dans le cas $n = 0$	75
6.9.3	Calcul des constantes du lemme 3.11	75
6.9.4	Preuve du théorème 3.3	88
6.9.5	Preuve du lemme 4.6	92

Remerciements

Nous remercions chaleureusement notre tuteur de PSC, Carlos MATHEUS DA SILVA, pour son aide bienveillante et régulière tout au long de cette année de travail. Nous souhaitons aussi remercier notre coordinateur, Javier FRESAN, pour le suivi de notre travail.

1 Introduction

La question de la rigidité spectrale à laquelle s'intéresse Kac fut initialement posée par le professeur Bochner dans les années 50. En 1966, au cours d'une discussion avec le professeur Bers, Mark Kac le reformule ainsi : "Peut-on entendre la forme d'un tambour ?" autrement dit, la seule connaissance des valeurs propres de l'opérateur Laplacien sur le domaine considéré avec des conditions de Dirichlet au bord peut-elle suffire à déterminer ce domaine. Dans son article, Kac montre la rigidité spectrale du cercle, en utilisant deux résultats clés : l'inégalité isopérimétrique mais avant tout un résultat établi par Herman Weyl liant le nombre de valeurs propres au volume du domaine,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{N}(\lambda)}{\lambda} = \frac{|\Omega|}{2\pi}$$

où $\mathcal{N}(\lambda)$ représente le nombre de valeurs propres inférieures à λ .

Ce résultat fondamental est initialement un conjecture énoncée par le physicien Lorentz au congrès "Alte und neue Fragen der Physik" de Göttingen en 1910. Si Hilbert affirme à l'époque ne jamais voir la preuve de cette loi de son vivant, c'est à peine deux ans plus tard qu'un de ses élèves, Herman Weyl, en établit la démonstration, en se basant sur la théorie des équations intégrales développée par Hilbert quelques années auparavant.

Weyl conjecture même un résultat plus fort faisant intervenir à la fois le volume (resp. l'aire dans notre problème 2D) du domaine et l'aire (resp. le périmètre) de sa surface. Pour un domaine borné $\Omega \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{N}(\lambda) = (2\pi)^{-d} \lambda^{d/2} \omega_d |\Omega| \mp \frac{1}{4} (2\pi)^{1-d} \omega_{d-1} \lambda^{(d-1)/2} |\partial\Omega| + o(\lambda^{(d-1)/2}).$$

Où ω_d est le volume de la boule unité de \mathbb{R}^d .

Ce second résultat permet à Kac, avec l'utilisation de l'inégalité isopérimétrique, de montrer qu'il est possible "d'entendre la forme d'un cercle".

Si du temps de Kac la question de la rigidité spectrale restait insoluble, les mathématiciens Gordon, Webb et Wolpert construisent deux domaines spectralement équivalents mais non isomorphes. Cependant, ces domaines ne sont pas lisses et la rigidité spectrale de domaines lisses reste encore à prouver à ce jour.

Des mathématiciens contemporains, tels Hezari et Zelditch, ou encore Avila, DeSimoi et Kaloshin, ont montré la rigidité spectrale d'ellipses de faible excentricité, en abordant deux approches différentes : la première, analytique, utilisant notamment des inégalités de traces ; et la seconde, dynamique, s'intéressant aux trajectoires de billard dans une ellipse un peu déformée.

Si ces deux résultats aboutissent à la conclusion d'un domaine isospectral à une ellipse dont l'excentricité e est "suffisamment petite", celle-ci n'est pas quantifiée. Ce PSC se propose donc d'aboutir à une minoration, quoique grossière, d'une excentricité critique e^* en dessous de laquelle les théorèmes d'isospectralité d'Hezari et Zelditch et Avila, deSimoi et Kaloshin s'appliquent.

En suivant de près les arguments de Hezari-Zelditch et A-dS-K, nous avons au moins obtenu une majoration de l'excentricité e^* qui ne semble pas être plus grande que 10^{-112} .

2 Étude de l'article de Kac

2.1 Obtention du premier du développement asymptotique en fonction de l'aire de Ω

L'intuition physique, selon Kac, permet d'une part d'élaborer des conjectures et de trouver un chemin de preuve et d'éventuelles généralisations. C'est l'approche qu'il mène tout au long de l'article : d'abord il raisonne d'un point de vue physique à l'aide d'un calcul formel puis il démontre la conjecture émise en s'appuyant sur cette intuition. Le domaine de la mécanique quantique statistique étant moins proche de l'intuition physique, il propose de se placer dans un autre contexte physique plus abordable, celui de la théorie de la diffusion.

Toutefois, le lecteur pourra trouver une application de la loi de Weyl dans le cadre de la physique statistique quantique en annexe.

On considère maintenant des particules réparties dans l'espace *plan*. La matière est initialement concentrée en $\rho \in \Omega$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 délimité par sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$ que l'on suppose *assez* régulière. La densité de particules/de matière est noté $P_\Omega(\rho|r, t)$ mais pour simplifier les notations, on raisonnera à ρ fixé, ce qui nous permettra d'écrire seulement $P_\Omega(r, t)$ par la suite.

L'équation de diffusion est de la forme :

$$\frac{\partial P_\Omega}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta P_\Omega \quad (1)$$

avec la condition aux bords à $t > 0$ fixé :

$$P_\Omega(r, t) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \text{dist}(r, \Gamma) \rightarrow 0 \quad (2)$$

De plus, la condition initiale est :

$$P_\Omega(r, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \delta(r - \rho) = \delta_\rho(r) \quad (3)$$

La condition aux bords (2) traduit le fait que la frontière absorbe les particules et la condition initiale (3) le fait que la matière est concentrée initialement en ρ . L'équation différentielle peut encore se réécrire comme :

$$\frac{\partial P_\Omega}{\partial t} = -\hat{H} P_\Omega \quad (4)$$

où $\hat{H} = -\frac{1}{2}\Delta$. On procède alors comme en mécanique quantique en décomposant $P_\Omega(\varepsilon, t)$ ($\varepsilon > 0$) sur une base $(\psi_n)_{n \geq 1}$ des fonctions propres de \hat{H} associées aux valeurs propres λ_n :

$$P_\Omega(r, \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} c_n(\varepsilon) \psi_n(r) \quad (5)$$

où $c_n(\varepsilon) = \langle \psi_n | P_\Omega(r, \varepsilon) \rangle = \int_\Omega \psi_n(r) P_\Omega(r, \varepsilon) dr$ Soulignons que les fonctions sont à valeurs réelles contrairement à celles utilisées en mécanique quantique. On obtient alors pour tout $t > \varepsilon$:

$$P_\Omega(r, t) = e^{-\hat{H}t} P_\Omega(r, \varepsilon) \quad (6)$$

$$= \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n(t-\varepsilon)} c_n(\varepsilon) \psi_n(r) \quad (7)$$

Comme par définition de ce qui signifie (3), $c_n(\varepsilon) \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \psi_n(\rho)$ pour tout $n \geq 1$, on obtient en faisant tendre ε vers 0^+ :

$$P_\Omega(r, t) = \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n t} \psi_n(\rho) \psi_n(r) \quad \forall t > 0 \quad (8)$$

Intuitivement, physiquement, pour t assez petit, les particules n'auront pas encore "senti" le bord absorbant Γ de Ω donc on peut s'attendre à ce que :

$$P_\Omega(r, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} P_0(r, t) \quad (9)$$

où P_0 correspond à la solution de l'équation différentielle dans le cas sans bords. La solution P_0 est connue et est donnée par :

$$P_0(r, t) = \frac{1}{2\pi t} \exp\left(-\frac{|r - \rho|^2}{2t}\right) \quad (10)$$

D'après ce qui précède, on obtient donc en $r = \rho$:

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n t} \psi_n(\rho)^2 \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi t} \quad (11)$$

Si l'on intègre *formellement* par rapport à ρ dans l'équation précédente, il vient :

$$\int_{\Omega} \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n t} \psi_n(\rho)^2 d\rho \sim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{1}{2\pi t} d\rho \quad (12)$$

soit,

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n t} \underbrace{\int_{\Omega} \psi_n(\rho)^2 d\rho}_{=1} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} \quad (13)$$

autrement dit,

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n t} \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|\Omega|}{2\pi t} \quad (14)$$

2.2 Obtention du deuxième terme du développement asymptotique en fonction du périmètre de Ω

On vient d'obtenir une formule asymptotique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} \quad (15)$$

Notre but est d'améliorer cette formule, *i.e.* obtenir plus de précision sur le comportement de $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t}$ lorsque $t \rightarrow 0$. Ce que l'on va montrer est la formule suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \quad (16)$$

où L est le périmètre de Ω qui est convexe et avec $\partial\Omega$ suffisamment régulier.

Ici, on ajoute la condition que Ω est convexe : si on reprend la preuve de la formule, l'idée de base est de considérer le problème de diffusion mais sans bord, en utilisant le fait que pour une durée assez petite, la matière n'aura pas encore "senti" le bord. Mais ce processus ne donne aucune information sur $\partial\Omega$, information qui est bien sûr essentielle pour connaître la forme de Ω . Autrement dit, si on pouvait savoir où détailler $\partial\Omega$, on obtiendra une formule asymptotique ayant plus de précision, cela explique pourquoi on exige que Ω soit convexe.

Soit q le point de $\partial\Omega$ qui est le plus proche du point $\rho \in \Omega$ fixé et on note $l(\rho)$ la droite passant par q et perpendiculaire au segment $[\rho, q]$, *i.e.* la droite tangente à $\partial\Omega$ en q . Intuitivement, la matière n'aura pas senti la courbure de $\partial\Omega$ en q pour une durée assez petite. C'est-à-dire, la matière "croit" que $\partial\Omega$ est une droite $l(\rho)$, donc on obtiendra

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_{\Omega}(\rho|r, t) = P_{l(\rho)}(\rho|r, t)$$

avec la condition initiale $P \rightarrow \delta(\rho - r)$

Si on prend $r = \rho$ et l'on intègre sur Ω :

$$\int_{\Omega} P_{\Omega}(\rho|\rho, t) d\rho = \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \Psi_n^2(\rho) d\rho = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \int_{\Omega} \Psi_n^2(\rho) d\rho = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t}$$

$$\int_{\Omega} P_{l(p)}(\rho|r, t) d\rho = \int_{\Omega} \frac{1 - e^{-2\delta^2/t}}{2\pi t} d\rho = \frac{|\Omega|}{2\pi} - \frac{1}{2\pi t} \int_{\Omega} e^{-2\delta^2/t} d\rho$$

avec ici $\delta(\rho) = \|q - \rho\| = \text{dist}(\rho, \partial\Omega)$.

Soit $\Gamma(\delta)$ la courbe définie par $\{r \in \Omega | \text{dist}(\partial\Omega) = \delta\}$ et on note que $\partial\Omega = \Gamma(0)$, donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{-2\delta(\rho)^2/t} d\rho &= \int_0^{\delta_0} d\delta \int_{\Gamma(\delta)} e^{-2\delta^2/t} d\rho + O(|\Omega|e^{-2\delta_0^2/t}) \\ &= \int_0^{\delta_0} e^{-2\delta^2/t} L(\delta) d\delta + O(|\Omega|e^{-2\delta_0^2/t}) \end{aligned}$$

ou $L(\delta)$ est le périmètre de $\Gamma(\delta)$, donc on a :

$$\int_{\Omega} e^{-2\delta^2/t} d\rho \sim \sqrt{t} \int_0^{\delta_0/\sqrt{t}} e^{-2x^2} L(x\sqrt{t}) dx \sim \sqrt{t} L \int_0^{+\infty} e^{-2x^2} dx = \frac{1}{4} L \sqrt{2\pi t}$$

Finalement, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$

On note que $\Gamma(\delta)$ n'existe pas pour une valeur δ trop grande (car Ω est borné), donc on doit fixer un seuil δ_0 et calculer l'intégrale $\int_0^{\delta_0} e^{-\frac{2\delta^2}{t}} L(\delta) d\delta$ et l'intégrale $\int_{\delta > \delta_0} e^{-\frac{2\delta^2}{t}} L(\delta) d\rho$ séparément.

Pour la deuxième intégrale, on a :

$$\int_{\delta > \delta_0} e^{\left(-\frac{2\delta^2}{t}\right)} d\rho \leq \int_{\delta > \delta_0} e^{\left(-\frac{2\delta_0^2}{t}\right)} d\rho \leq \int_{\Omega} e^{\left(-\frac{2\delta_0^2}{t}\right)} d\rho = |\Omega| e^{-2\delta_0^2/t}$$

Pour le démontrer en mathématique, on aurait besoins des lemmes techniques, et on met la preuve dans l'annexe.

Cela permet de conclure sur la rigidité spectrale du cercle en utilisant **l'inégalité isopérimétrique** :

$$4\pi|\Omega| \leq L$$

avec égalité uniquement pour le cercle.

2.3 Annexe

2.3.1 Étude de quelques solutions de l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur utilisée par Kac s'écrit :

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta P = 0 \quad (\star)$$

où P est une fonction de la densité de matière sur \mathbb{R}^2 . La forme de l'équation utilisée par celui-ci peut différer d'autres auteurs au niveau de la constante devant le laplacien Δ (comme il le dit lui-même lorsqu'il fait le choix $c^2 = \frac{1}{2}$). On notera pour l'instant P sans indices et on précisera les conditions aux bords avec lesquelles ont travaille si on les utilise.

On a aussi la condition initiale :

$$P(\rho; x, t) \rightarrow \delta(x - \rho) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (\star\star)$$

quand $t \rightarrow 0^+$. Dans toute la suite, on fixera $\rho \in \mathbb{R}^2$.

Arrêtons-nous un peu pour préciser ce qui se cache derrière cette limite. Insistons sur le fait que δ_ρ est une distribution et n'est donc pas une fonction au sens usuel. On ne peut donc pas parler de convergence simple

ici comme on aurait tendance à le faire (δ_ρ est précisément une forme linéaire continue). Kac en donne une interprétation : pour lui $(\star\star)$ signifie que pour tout ouvert A de \mathbb{R}^2 :

$$\int_A P(x, t) dx \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \mathbf{1}_A(\rho) \tag{17}$$

(on a rajouté le cas implicite en même temps si ρ n'est pas dans A). Intuitivement, cela veut dire que pour tout ouvert A contenant ρ de diamètre si petit que l'on veut, pour t suffisamment proche de 0, la densité de particules sera proche de 1, ce qui est cohérent physiquement, puisque les particules n'ont pas encore "eu le temps" de diffuser en dehors de l'ouvert et sont concentrées au voisinage de ρ .

On se propose ici de résoudre l'équation de la chaleur pour des ouverts Ω "typiques", ce qui nous servira dans la suite.

Cas où $\Omega = \mathbb{R}^2$ (sans bords) *Le paragraphe qui suit s'inspire largement du cours de Frank Pacard donné en MAT 371 [1].*

On passe à la transformée de Fourier (normalisée) par rapport à $x \in \mathbb{R}^2$ dans l'équation (\star) . On a :

$$\begin{cases} \widehat{\partial_t P} &= \partial_t \widehat{P} \\ -\widehat{\Delta P} &= |\xi|^2 \widehat{P} \end{cases}$$

Tous les calculs effectués ici sont formels : par exemple, la première égalité sous réserve que la dérivation sous le signe intégral soit justifiée. Pour la seconde égalité, on utilise le fait que $\frac{\partial \widehat{P}}{\partial x_k} = i\xi_k \widehat{P}$ (pour $k \in \{1, 2\}$)

donc $\frac{\partial^2 \widehat{P}}{\partial x_k^2} = -\xi_k^2 \widehat{P}$. Il est important de remarquer que cette formule est valable car l'on n'a pas de conditions aux bords : en effet, pour démontrer cette formule, on effectue une intégration par parties par rapport à x_k (et on utilise après le théorème de Fubini) et en faisant cela, on se place à l'infini en annulant le terme "entre crochets". Ainsi, il vient que $\widehat{\Delta P} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -|\xi|^2 \widehat{P}$. Finalement, on obtient l'équation suivante vérifiée par \widehat{P} :

$$\partial_t \widehat{P} = -\frac{|\xi|^2}{2} \widehat{P}$$

A ξ fixé (et pour $t > 0$), il s'agit d'une ODE d'ordre 1 dont la solution s'exprime par :

$$\widehat{P}(\xi, t) = \widehat{P}(\xi, 0) e^{-\frac{|\xi|^2 t}{2}}$$

Ensuite, on passe à la transformée de Fourier inverse pour obtenir P :

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\xi - \frac{t|\xi|^2}{2}} \widehat{P}(\xi, 0) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\xi - \frac{t|\xi|^2}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} P(y, 0) e^{-iy\xi} dy \right) d\xi \\ P(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^2} P(y, 0) I(y) dy \end{aligned}$$

où $I(y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-y)\xi - \frac{t|\xi|^2}{2}} d\xi$ (ici, on fait un calcul *formel* pour "deviner" une solution car on a pris par exemple la transformée de Fourier d'un delta de Dirac comme si il s'agissait d'une fonction - cf. *remarque ci-dessous*).

Il reste à calculer maintenant $I(y)$ pour $y \in \mathbb{R}^2$. Si l'on note $G_a(y) = \frac{1}{2\pi a} e^{-\frac{|y|^2}{2a}}$ ($a > 0$) la gaussienne

centrée en 0 et de variance a , on constate que :

$$\begin{aligned} I(y) &= \widehat{G}_t^{-1}(x - y) \\ &= G_t(x - y) \\ I(y) &= \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $P(y, 0) = \delta(x - \rho)$, on aboutit finalement à :

$$\boxed{P(x, t) = \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{|x-\rho|^2}{2t}}} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times]0, +\infty[$$

Vérifions que $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \times]0, +\infty[)$, est solution de (\star) et vérifie la condition initiale $(\star\star)$. On admettra que si l'on impose en plus que $\inf_{\mathbb{R}^2} P(\cdot, t) > -\infty \quad \forall t > 0$, alors c'est l'unique solution à ce problème.

On calcule :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t}(x, t) = \left(-\frac{1}{t} + \frac{|x - \rho|^2}{2t^2}\right) P(x, t) & \frac{\partial P}{\partial x_i}(x, t) = -\frac{x_i - \rho_i}{t} P(x, t) \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}(x, t) = \left(-\frac{1}{t} + \frac{(x_i - \rho_i)^2}{t^2}\right) P(x, t) & \Delta P(x, t) = \left(-\frac{2}{t} + \frac{|x - \rho|^2}{t^2}\right) P(x, t) \end{cases}$$

Il vient ainsi que : $\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta P = 0$, soit P vérifie (\star) .

Pour la régularité de P , on constate par récurrence immédiate que pour tout $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$, il existe $Q_{n_1, n_2, n_3} \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ tel que $\frac{\partial^{n_1+n_2+n_3}}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial t^{n_3}} P(x, t) = Q_{n_1, n_2, n_3}(\frac{1}{t}, x_1 - \rho_1, x_2 - \rho_2) P(x, t)$ (l'expression de Q_{n_1, n_2, n_3} importe peu). La continuité des deux facteurs dans l'expression précédente s'obtient alors directement par exemple par caractérisation séquentielle de la continuité et en utilisant le fait que la convergence dans $\mathbb{R}^2 \times]0, +\infty[$ implique la convergence coordonnée par coordonnée. D'où le résultat voulu.

Enfin, pour $(\star\star)$, utilisons l'interprétation (17). Soit A un ouvert contenant ρ et $B(\rho, \mathbb{R})$ la boule ouverte centrée en ρ et de rayon $R > 0$ choisi de telle sorte que $B(\rho, R) \subset A$. Alors,

$$\int_{B(\rho, R)} P(x, t) dx = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(\rho, R)} e^{-\frac{|x-\rho|^2}{2t}} dx \tag{18}$$

$$\left[y = \frac{x - \rho}{\sqrt{2t}} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{B(0, \frac{R}{\sqrt{2t}})} e^{-|y|^2} dy \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1 \tag{19}$$

où dans la dernière égalité on a utilisé le théorème de la convergence dominée. De plus, comme

$$\int_{B(\rho, R)} P(x, t) dx \leq \int_A P(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} P(x, t) dx = 1 \tag{20}$$

on conclut que :

$$\int_A P(x, t) dx \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1 \tag{21}$$

d'où le résultat voulu.

Cas où $\bar{\Omega} = [0, a]^2$ (carré de côté $a > 0$)

Comme dans le cas ci-dessus, puisque nous n'avons pas encore fait de théorie sur les distributions, on "fera" comme si δ était une fonction de L^2 : concrètement, on peut remplacer à chaque fois δ par $\delta(\varepsilon) : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$ (qui est d'intégrale égale à 1 et est assez régulière - de classe \mathcal{C}^∞) et qui "tend" vers δ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (voir

l'appendice II du livre de Cohen-Tanoudji, Diu et Laloë [2]).

Revenons maintenant au cas étudié. Étudions d'abord le cas $1D$ où $\bar{\Omega} = [0, a]$: une fois ce cas résolu, on obtiendra alors la solution pour le cas $2D$ comme en mécanique quantique dans le sens où l'on peut considérer l'espace des solutions dans le cas $2D$ comme étant le produit tensoriel de l'espace des solutions dans le cas $1D$ par lui-même. L'équation de la chaleur ayant la même forme que l'équation de Schrödinger, procédons de la même manière en cherchant les fonctions propres de l'opérateur $H = -\frac{1}{2}\Delta$ agissant dans $L^2([0, a], \mathbb{R})$.

Soit f une fonction propre de H de valeur propre E . f vérifie :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + 2Ef = 0 \tag{22}$$

Comme f est de carré intégrable, on a nécessairement $2E = k^2 > 0$ sinon on aurait une solution identiquement nulle, d'où $f(x) = A \sin(kx)$ avec $A \in \mathbb{R}$ car $f(0) = 0$. En utilisant le fait que $f(a) = 0$, on retrouve le résultat connu du puits de potentiel infini qui exprime que les valeurs de k sont quantifiées telles que : $k_n = \frac{n\pi}{a}$ avec $n \geq 1$ (on ne cherche que les solutions non nulles linéairement indépendantes). Si l'on choisit $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ pour que $\|f_n\|_{L^2} = 1$, f_n est vecteur propre de $H = -\frac{1}{2}\Delta$ pour la valeur propre $E_n = \frac{k_n^2}{2} = \frac{n^2\pi^2}{2a^2}$ et $(e_n)_{n \geq 1} = \left(\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right)_{n \geq 1}$ forme alors une base hilbertienne de $L^2([0, a], \mathbb{R})$ (théorème de Sturm-Liouville).

H ne dépend pas explicitement du temps, ce qui va nous permettre de résoudre l'équation de la chaleur dans le cas général. En effet, on peut la réécrire :

$$\partial_t P(x, t) = -HP(x, t) \tag{23}$$

Sous cette forme, la solution est donnée par :

$$P(x, t) = e^{-Ht} P(x, 0) \quad \forall (x, t) \in [0, a] \times [0, +\infty[\tag{24}$$

Décomposons alors $P(x, 0)$ sur la base des vecteurs propres de H :

$$P(x, 0) = \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) = \sum_{n \geq 1} c_n e_n(x) \tag{25}$$

avec $c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{[0, a]} \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, d'où $c_{2n} = 0$ et $c_{2n-1} = \sqrt{\frac{2}{a}}(-1)^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

On obtient ainsi :

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} e^{-Ht} e_{2n-1}(x) \quad [e^{-Ht} \text{ est un opérateur borné}] \tag{26}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{2a^2}} e_{2n-1}(x) \tag{27}$$

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{2a^2}} e_{2n-1}(x) \tag{28}$$

$$P(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{a}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{2a^2}} \tag{29}$$

Dans le cas $2D$ où $\Omega = [0, a]^2$, le raisonnement est quasi-identique : l'opérateur H s'écrit cette fois comme $H = H_x + H_y$ où $H_x = -\frac{1}{2}\Delta_x$ (resp. $H_y = -\frac{1}{2}\Delta_y$) sont les opérateurs définis précédemment dans le cas $1D$ mais prolongés dans l'espace produit tensoriel $\mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y$. Une base de vecteurs propres de H est alors donnée

par $((x, y) \mapsto e_{n,m}(x, y))_{n,m \geq 1} = ((x, y) \mapsto e_n(x)e_m(y))_{n,m \geq 1}$.

La condition initiale est maintenant :

$$P(x, 0) = \delta(r - \rho) \tag{30}$$

$$= \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \delta\left(y - \frac{a}{2}\right) \tag{31}$$

$$= \sum_{n,m \geq 1} c_{n,m} e_n(x) e_m(y) \tag{32}$$

avec $c_{n,m} = \frac{2}{a} \int_{[0,a]^2} \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \delta\left(y - \frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dx dy = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$ donc $c_{2n-1, 2m-1} = \frac{2}{a} (-1)^{n+m}$ pour $n, m \geq 1$ et les autres coefficients sont nuls.

Il vient comme avant :

$$P(r, t) = \frac{4}{a^2} \sum_{n,m \geq 1} (-1)^{n+m} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(2m-1)\pi y}{a}\right) e^{-\frac{[(2n-1)^2 + (2m-1)^2]\pi^2 t}{2a^2}} \tag{33}$$

En évaluant en $r = \rho$, on trouve finalement :

$$\boxed{P(\rho, t) = \frac{4}{a^2} \sum_{n,m \geq 1} \exp\left[-\frac{[(2n-1)^2 + (2m-1)^2]\pi^2 t}{2a^2}\right]} \tag{34}$$

ce qui correspond à la formule donnée par Kac.

2.3.2 Une application de la loi de Weyl

Montrons comment Kac déduit de la loi de Weyl des équivalents asymptotiques pour certaines grandeurs pertinentes.

On considère un problème de mécanique statistique relié à la distribution des valeurs propres du laplacien : M particules sont confinées dans un volume Ω en équilibre thermique à la température T . La probabilité de trouver les particules aux positions r_i à dr_i près ($1 \leq i \leq M$) vaut :

$$dP(r_1, \dots, r_M) = \frac{e^{-\beta V(r_1, \dots, r_M)} dr_1, \dots, dr_M}{\int_{\Omega^M} e^{-\beta V(r_1, \dots, r_M)} dr_1, \dots, dr_M} \quad (35)$$

où $\beta = \frac{1}{k_B T}$ (avec k_B la constante de Boltzmann) et $V(r_1, \dots, r_M)$ est le potentiel d'interaction des particules si elles sont situées aux positions $r_1, \dots, r_M \in \mathring{\Omega}$ (la probabilité est nulle en dehors de l'intérieur de Ω car on a supposé les particules confinées). On peut noter que l'expression au dénominateur sert à normaliser pour avoir une probabilité. Cependant, cette expression n'est valable que si l'on considère les particules comme étant *discernables*. Si ce n'est pas le cas, il faut recourir à la mécanique quantique ; l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour le système constitué de M particules identiques de masse m (et décrit par la fonction d'onde Ψ) est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(r_1, \dots, r_M) \Psi = E \Psi \quad (36)$$

avec la condition aux bords : $\Psi(r_1, \dots, r_M) \rightarrow 0$ s'il existe $1 \leq i \leq M$ tel que $r_i \rightarrow s \in \partial\Omega$. Cela revient à supposer que le potentiel est infini en dehors de Ω , i.e. que les particules sont confinées dans ce volume (analogie avec le puits infini). Le théorème de Sturm-Liouville (avec conditions de Dirichlet homogènes aux bords) donne alors l'existence d'une base hilbertienne de fonctions d'onde $(\Psi_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ associées aux valeurs propres $(E_n \geq 0)_{n \geq 0}$ qu'on ordonne de manière croissante (remarquer que les valeurs propres peuvent être dégénérées car il n'y a pas forcément stricte croissance). A l'équilibre thermodynamique, le système est décrit quantiquement par un mélange statistique des états $|\Psi_n\rangle$ avec des poids $p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$ où $Z = \sum_{n \geq 0} e^{-\beta E_n}$ est la fonction de partition (servant de normalisation pour les probabilités). Cela signifie que le système a une probabilité $\frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$ d'être dans l'état $|\Psi_n\rangle$. Si le système est dans cet état, la probabilité que les particules soient situées en r_i à dr_i près vaut $|\Psi_n(r_1, \dots, r_M)|^2 dr_1 \dots dr_M$ (contrairement à Kac, on rajoute ici des modules car les fonctions d'onde sont à valeurs *complexes*). Comme cette éventualité a une probabilité p_n de se réaliser, on pondère ce résultat par p_n et on somme sur n d'où :

$$dP(r_1, \dots, r_M) = \frac{1}{Z} \sum_{n \geq 0} e^{-\beta E_n} |\Psi_n(r_1, \dots, r_M)|^2 dr_1, \dots, dr_M \quad (37)$$

(une explication détaillée est disponible dans le complément E_{III} du livre de Cohen-Tanoudji, Diu et Laloë). Considérons maintenant le cas d'un gaz parfait où le potentiel d'interaction entre les particules est *nul* quelque soit les configurations de ces dernières. Classiquement, la distribution des particules étant supposé uniforme et les particules n'interagissant pas par hypothèse, on a :

$$dP(r_1, \dots, r_M) = \frac{dr_1 \dots dr_M}{|\Omega|^M} = \prod_{j=1}^M \frac{dr_j}{|\Omega|} \quad (38)$$

où $|\Omega|$ est la mesure de Lebesgue (donc ici le volume) de Ω , ce qui découle directement de (35) avec $V(r_1, \dots, r_M) = 0$ pour tout $r_1, \dots, r_M \in \mathring{\Omega}$.

Quantiquement, l'espace d'états du système \mathcal{E} apparaît comme le produit tensoriel des espaces d'états \mathcal{E}_i correspondant à chaque particule. Comme il n'y a pas de couplage entre les particules, l'hamiltonien du système s'écrit $\hat{H} = \sum_{i=1}^M \hat{H}_i$ où \hat{H}_i est l'hamiltonien associé à la particule i . De plus, les particules étant identiques l'ensemble des valeurs propres $(E'_i = \frac{\hbar^2}{m} \lambda_i \geq 0)_{i \geq 0}$ est le même pour tous les hamiltoniens et on

peut choisir une même base de vecteurs propres $(|\psi_i\rangle)_{i \geq 0}$ associés à ces valeurs propres (noter que les λ_i sont sans dimension). Pour $1 \leq i \leq M$, $|\psi_i\rangle$ vérifie : $\hat{H}_i |\psi_i\rangle = E'_i |\psi_i\rangle$ soit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_i = E'_i \psi_i \quad (39)$$

ou avec les notations introduites :

$$-\frac{1}{2} \Delta \psi_i = \lambda_i \psi_i \quad (40)$$

Comme vu en *PHY361*, une base des vecteurs propres de \mathcal{E} est donnée par $(|\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_M}\rangle)_{(i_1, \dots, i_M) \in \mathbb{N}^M}$ avec chaque vecteur propre associé à la valeur propre $\sum_{j=1}^M E'_{i_j}$. L'égalité (38) peut donc se réécrire :

$$dP(r_1, \dots, r_M) = \frac{\sum_{(i_1, \dots, i_M) \in \mathbb{N}^M} e^{-\beta \sum_{j=1}^M E'_{i_j}} |\psi_{i_1}(r_1) \dots \psi_{i_M}(r_M)|^2 dr_1 \dots dr_M}{\sum_{(i_1, \dots, i_M) \in \mathbb{N}^M} e^{-\beta \sum_{j=1}^M E'_{i_j}}} \quad (41)$$

$$= \prod_{j=1}^M \frac{\sum_{i \geq 0} e^{-\beta E'_i} |\psi_i(r_j)|^2 dr_j}{\sum_{i \geq 0} e^{-\beta E'_i}} \quad (42)$$

$$dP(r_1, \dots, r_M) = \prod_{j=1}^M \frac{\sum_{i \geq 0} e^{-\lambda_i \tau} |\psi_i(r_j)|^2 dr_j}{\sum_{i \geq 0} e^{-\lambda_i \tau}} \quad (43)$$

où $\tau = \frac{\hbar^2 \beta}{m} = \frac{\hbar^2}{mk_B T}$. Physiquement, on doit retrouver le cas classique lorsque $\hbar \rightarrow 0$ (comme \hbar est une constante, cela signifie plutôt que les longueurs d'onde de Broglie deviennent négligeables devant les dimensions caractéristiques du problème - par exemple le périmètre de Ω - selon la formule $\lambda = \frac{\hbar}{p}$) ou lorsque $T \rightarrow +\infty$, ce qui revient à faire tendre τ vers 0^+ . On peut donc conjecturer que :

$$\sum_{i \geq 0} e^{-\lambda_i \tau} |\psi_i(r_j)|^2 \underset{\tau \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i \geq 0} e^{-\lambda_i \tau} \quad \forall 1 \leq j \leq M \quad (44)$$

Les M particules étant identiques, on peut considérer l'équivalent pour une seule particule et noter :

$$\sum_{i \geq 0} e^{-\lambda_i \tau} |\psi_i(r)|^2 \underset{\tau \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i \geq 0} e^{-\lambda_i \tau} \quad (45)$$

pour $r \in \mathring{\Omega}$.

Dans le cas où $r \in \mathbb{R}^2 \cap \mathring{\Omega}$, le résultat devrait être le même sauf que l'on doit remplacer le volume de Ω par son aire.

Montrons maintenant que :

$$\sum_{n \geq 0} e^{-\lambda_n \tau} |\psi_n(r)|^2 \sim \frac{1}{2\pi\tau} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} d\lambda \quad (46)$$

ce qui revient à montrer que :

$$\sum_{n \geq 0} e^{-\lambda_n \tau} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi\tau} \quad (47)$$

Dans un premier temps, expliquons pourquoi il suffit de montrer que :

$$\sum_{n \geq 0} e^{-[\lambda_n] \tau} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi\tau} \quad (48)$$

Posons $x = e^{-\tau}$ quand $\tau \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 1^-$. L'équivalent devient :

$$\sum_{n \geq 0} x^{[\lambda_n]} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{|\Omega|}{2\pi \ln x} \quad (49)$$

$$\sim \frac{|\Omega|}{2\pi(1-x)} \quad (50)$$

Essayons alors de contrôler la différence entre $\sum_{n \geq 0} x^{\lambda_n}$ et $\sum_{n \geq 0} x^{\lfloor \lambda_n \rfloor}$:

$$|x^{\lambda_n} - x^{\lfloor \lambda_n \rfloor}| = x^{\lfloor \lambda_n \rfloor} \overbrace{|x^{\lambda_n - \lfloor \lambda_n \rfloor} - 1|}^{\geq 0} \quad (51)$$

$$= x^{\lfloor \lambda_n \rfloor} (1 - x^{\lambda_n - \lfloor \lambda_n \rfloor}) \quad (52)$$

$$[x^{\lambda_n - \lfloor \lambda_n \rfloor} \geq x] \leq x^{\lfloor \lambda_n \rfloor} (1 - x) \quad (53)$$

D'où l'on déduit que :

$$\left| \sum_{n \geq 0} x^{\lambda_n} - \sum_{n \geq 0} x^{\lfloor \lambda_n \rfloor} \right| \leq \sum_{n \geq 0} |x^{\lambda_n} - x^{\lfloor \lambda_n \rfloor}| \quad (54)$$

$$\leq (1 - x) \sum_{n \geq 0} x^{\lfloor \lambda_n \rfloor} \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o \left(\sum_{n \geq 0} x^{\lfloor \lambda_n \rfloor} \right) \quad (55)$$

Donc $\sum_{n \geq 0} x^{\lambda_n} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n \geq 0} x^{\lfloor \lambda_n \rfloor}$.

Ainsi, on se ramène à l'étude de la série lacunaire $\sum_{n \geq 0} x^{\lfloor \lambda_n \rfloor} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ avec $a_n = \#\{\lambda \in \text{vp}(-\frac{1}{2}\Delta) \mid \lfloor \lambda \rfloor = n\} = \#\left(\text{vp}(\frac{1}{2}\Delta) \cap [n, n+1[\right)$ (cf. (40)) où $\#$ est la notation pour le cardinal d'un ensemble. On doit donc montrer que :

$$(1 - x) \sum_{n \geq 0} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{|\Omega|}{2\pi} \quad (56)$$

Transformons le membre de gauche :

$$(1 - x) \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} \quad (57)$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^n \quad (58)$$

$$= a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n-1}) x^n \quad (59)$$

Il faut donc montrer que :

$$\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n-1}) x^n \rightarrow \frac{|\Omega|}{2\pi} - a_0 \quad (60)$$

Or $(S_N)_{N \geq 1} = (\sum_{n=1}^N (a_n - a_{n-1}))_{N \geq 1} = (a_N - a_0)_{N \geq 0}$ est Césaro-convergente vers $\frac{|\Omega|}{2\pi} - a_0$, *i.e.* $(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n)_{N \geq 1}$ converge $\frac{|\Omega|}{2\pi} - a_0$. En effet,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n - a_0 \quad (61)$$

$$= \frac{1}{N} (\mathcal{N}(N) - \mathcal{N}(0)) - a_0 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{|\Omega|}{2\pi} - a_0 \quad (62)$$

Pour la deuxième égalité, on utilise le fait que $\sum_{n=1}^N a_n$ correspond au nombre de valeurs propres comprises entre 1 et N (strictement) donc à $\mathcal{N}(N) - \mathcal{N}(0)$ où $\mathcal{N} : y \mapsto \sum_{\lambda_n < y} 1 = \#\{\lambda \in \text{vp}(-\frac{1}{2}\Delta) \mid \lambda < y\}$ est la fonction de comptage des valeurs propres (strictement inférieures à un réel donné). Ensuite, l'équivalent de Weyl (dans le cas 2D) donné par $\mathcal{N}(y) \sim_{y \rightarrow +\infty} \frac{|\Omega|}{2\pi} y$ donne la limite à la fin.

Finalement, le théorème d'Abel assure que comme $(S_N)_{N \geq 0}$ est Césaro-Convergente vers $\frac{|\Omega|}{2\pi} - a_0$ alors $\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n-1}) x^n \rightarrow \frac{|\Omega|}{2\pi} - a_0$ d'où le résultat final voulu.

Revenons à l'équivalent (46). On peut réécrire le membre de gauche pour "homogénéiser" l'expression par rapport à celle du membre de droite. :

$$\sum_{n \geq 1} |\psi_n(r)|^2 e^{-\lambda_n \tau} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \tau} dA(\lambda) \quad (63)$$

avec $A(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} |\psi_n(r)|^2$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Avant de démontrer cette égalité, remarquons déjà que l'intégrale dans le membre de droite est une intégrale de Riemann-Stieltjes bien définie car A est croissante donc à variation bornée (BV) mais ne se ramène pas à une intégrale de Riemann ou de Lebesgue faisant intervenir la dérivée de A car $A' = 0$ pp.

Passons maintenant à la démonstration : on note $f : x \mapsto e^{-x\tau}$. Pour $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ fixé, considérons une subdivision $\Delta_m = (x_k)_{0 \leq k \leq m}$ tel que $x_k = k \frac{\lambda_N}{m} = k \delta_m$ ($1 \leq k \leq m$) où $\delta_m = \frac{\lambda_N}{m}$ est le pas de la subdivision. Soit $1 \leq n \leq N - 1$, il existe $1 \leq k_n \leq m$ tel que $x_{k_n} \leq \lambda_n < x_{k_n+1}$ (il suffit de prendre $k_n = \lfloor \frac{\lambda_n}{\delta_m} \rfloor$). Pour m assez grand tel que $\delta_m < \min_{1 \leq n \leq N-1} |\lambda_{n+1} - \lambda_n|$, on a aussi $\lambda_{n-1} < x_{k_n}$ pour tout $1 \leq n \leq N - 1$. On obtient alors que $A(x_{k_n+1}) - A(x_{k_n}) = |\psi_n(r)|^2$ (la différence correspond au saut de A en la discontinuité λ_n). De plus, A est constante sur tout autre segment $[x_i, x_{i+1}]$ (avec $i \notin \{k_n \mid 1 \leq n \leq N - 1\}$) donc $A(x_{i+1}) - A(x_i) = 0$. Maintenant, écrivons la somme de Darboux supérieure relativement à A et associée à f et à la subdivision Δ_m , que l'on note $S^+(f, A, \Delta_m)$, en utilisant ce qui précède :

$$S^+(f, A, \Delta_m) = \sum_{k=0}^m (A(x_{k+1}) - A(x_k)) \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f \tag{64}$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} (A(x_{k_n+1}) - A(x_{k_n})) \sup_{[x_{k_n}, x_{k_n+1}]} f \tag{65}$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} |\psi_n(r)|^2 e^{-x_{k_n}\tau} \tag{66}$$

$$S^+(f, A, \Delta_m) = \sum_{n=1}^{N-1} |\psi_n(r)|^2 e^{-\lfloor \frac{\lambda_n}{\delta_m} \rfloor \delta_m \tau} \tag{67}$$

Si l'on fait tendre m vers $+\infty$, $\delta_m \rightarrow 0$. Or $\lfloor x \rfloor \sim_{x \rightarrow +\infty} x$ donc $\lfloor \frac{\lambda_n}{\delta_m} \rfloor \delta_m \sim_{m \rightarrow +\infty} \lambda_n$. Il vient ainsi que :

$$S^+(f, A, \delta_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N-1} |\psi_n(r)|^2 e^{-\lambda_n \tau} \tag{68}$$

et par construction de l'intégrale de Riemann-Stieltjes, on obtient donc :

$$\int_0^{\lambda_N} e^{-\lambda\tau} dA(\lambda) = \sum_{n=1}^{N-1} |\psi_n(r)|^2 e^{-\lambda_n \tau} \tag{69}$$

Pour terminer, il suffit alors de faire tendre N vers $+\infty$ ($\lambda_N \rightarrow +\infty$) pour obtenir le résultat voulu.

A ce stade, nous avons donc l'équivalent suivant :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} dA(\lambda) \sim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{|\Omega|}{2\pi\tau} \tag{70}$$

Le théorème taubérien de Hardy-Littlewood(-Karamata) nous permet alors de conclure que :

$$\boxed{A(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} |\psi_n(r)|^2 \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|\Omega|}{2\pi} \lambda} \tag{71}$$

(remarquer que l'équivalent est ici pris sur λ que l'on fait tendre vers $+\infty$ alors qu'avant on le prenait sur τ que l'on faisait tendre vers 0^+)

2.3.3 La preuve pour le développement du deuxième terme

Maintenant, on essaie de donner un raisonnement mathématique rigoureux : on utilise presque la même idée pour obtenir la formule et on donne deux estimations sur $P_\Omega(\rho|\rho, t)$ telles que

$$C_1(t) \leq \int_\Omega P_\Omega(\rho|\rho, t) \leq C_2(t)$$

où $C_1(t) \sim C_2(t) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$

On obtient alors une inégalité tout de suite en utilisant le fait que Ω se trouve totalement dans un seul demi-plan délimité par la droite $l(\rho)$:

$$P_\Omega(\rho|\rho, t) \leq P_{l(\rho)}(\rho|\rho, t) = \frac{1}{2\pi t} - \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{2\delta^2}{t}}$$

Comme on a déjà calculé l'intégrale $\int_\Omega P_{l(\rho)}(\rho|\rho, t) d\rho$, on arrive à montrer que :

$$\int_\Omega P_\Omega(\rho|\rho, t) d\rho \leq \int_\Omega P_{l(\rho)}(\rho|\rho, t) d\rho \leq \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$

Maintenant, on essaie de trouver une borne inférieure en mettant un rectangle dans Ω , que l'on note R . Comme $R \subseteq \Omega$, on a $P_R(\rho|\rho, t) \leq P_\Omega(\rho|\rho, t)$.

Dans son article, Kac a utilisé une méthode subtile pour estimer $P_R(\rho|\rho, t)$: au lieu de considérer un rectangle fixe, il a utilisé un rectangle $R(t)$ qui dépend de t , c'est une idée basée sur l'observation suivante : pour donner une estimation efficace en utilisant l'inégalité ci-dessus, il faut que le rectangle soit le plus proche possible de $\partial\Omega$, donc il est naturel de penser à un rectangle qui gonfle au cours du temps et il y a aussi des techniques pour que l'on puisse bien localiser le rectangle $R(t)$. Finalement, on obtient l'estimation suivante :

$$P_R(\rho|\rho, t) = \frac{1}{2\pi t} \left(1 + o(\sqrt{t})\right) \left(1 - e^{-\frac{2\delta^2}{t}} + o\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)\right)$$

lorsque $\delta > \varepsilon\sqrt{t}$ où ε est une constante qui peut être suffisamment petite. Si l'on néglige le terme $o(\sqrt{t})$ et $o\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)$ t que l'on intègre sur $\Omega(\varepsilon\sqrt{t}) := \{r \in \Omega \mid \text{dist}(r, \partial\Omega) = \delta(r) > \varepsilon\sqrt{t}\}$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} &= \int_\Omega P_\Omega(\rho|\rho, t) > \int_{\Omega(\varepsilon\sqrt{t})} P_R(\rho|\rho, t) d\rho \\ &\sim \frac{1}{2\pi t} \int_{\Omega(\varepsilon\sqrt{t})} \left(1 - e^{-\frac{2\delta^2}{t}}\right) d\rho \\ &= \left(|\Omega(\varepsilon\sqrt{t})| - \frac{L}{4} \sqrt{2\pi t}\right) \frac{1}{2\pi t} \end{aligned}$$

On note que $|\Omega(\varepsilon\sqrt{t})| \sim |\Omega| - L\varepsilon\sqrt{t}$, donc

$$\sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} > \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{(L + o(1))}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$

On a ainsi réussi à trouver une estimation inférieure. Avec l'estimation supérieure que l'on a obtenue au début, on conclut que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$

3 Démonstration de la loi de Weyl en dimension n

Dans son article, Kac utilise de façon centrale une estimation asymptotique du nombre de valeurs propres inférieures à une valeur λ .

PROPOSITION :

Le contexte est donc celui d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n qui est borné.

$$\mathcal{N}(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{n/2} \tag{72}$$

où $\mathcal{N}(\lambda)$ est la fonction de comptage évoquée ci-dessus et $c_n = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}$ avec ω_n le volume de la boule unité dans \mathbb{R}^n .

On remarquera que ce résultat généralise à un espace à n dimensions le résultat que Kac utilise dans un contexte en dimension 2.

Nous allons dans la suite de ce document chercher à donner une preuve de cette loi. Pour cela, nous allons profiter des propriétés d'espaces de Hilbert des espaces de Sobolev \mathbf{H}^1 et $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Le produit scalaire associé est le suivant :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbf{H}^1} = \int_{\Omega} u'v' + uv$$

On utilisera l'espace $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ pour trouver des solutions au problème de Dirichlet et \mathbf{H}^1 pour des solutions au problème de Neumann. En tout état de cause, nous noterons indifféremment \mathbf{S} les espaces de Sobolev. De plus, d'après le théorème spectral, on peut donc extraire une base orthonormée $\{u_n\}$ de \mathbf{S} d'états propres pour chaque valeurs propres $\{\lambda_n\}$ classées dans l'ordre croissant.

On propose d'abord de donner des caractérisations variationnelles de ces valeurs propres.

PROPOSITION :

Énonçons d'abord une première version d'une telle caractérisation.

Soit \mathbf{S} et $\{\lambda_n\}$ comme ci-dessus, alors :

$$\lambda_n = \inf_{u \in \mathbf{H}_{n-1}} \rho(u) = \sup_{u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)} \rho(u)$$

où :

- $\mathbf{H}_{n-1} = \mathbf{S} \cap \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})^\perp$
- $\rho(u) = \frac{\|u'\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2}$ est le quotient de Rayleigh.

Ci-après, la preuve de ce résultat :

On va supposer dans le cadre d'étude qui nous est donné que les fonctions sont suffisamment régulières donc que les fonctions dans \mathbf{S} sont 2 fois faiblement différentiables.

Ainsi, pour tout $u \in \mathbf{S}$, d'après l'égalité de Parseval :

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, u_n \rangle|^2$$

En outre :

$$\|u'\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} u'.u' \stackrel{IPP}{=} \int_{\Omega} -\Delta(u).u$$

Or, en décomposant u sur une base de valeurs propres de $-\Delta$, on obtient :

$$\|u'\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\langle u, u_n \rangle|^2$$

Ce résultat étant acquis, prenons $u \in \mathbf{H}_{n-1}$:

$$\begin{aligned} \|u'\|_{L^2}^2 &= \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |\langle u, u_k \rangle|^2 \\ &\geq \lambda_n \sum_{k=n}^{\infty} |\langle u, u_k \rangle|^2 \\ &\geq \lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, u_k \rangle|^2 \\ &\geq \lambda_n \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Donc, pour tout $u \in \mathbf{H}_{n-1}$:

$$\rho(u) \geq \lambda_n$$

ce qui permet de prouver l'existence d'un minimum à ρ pour $u \in \mathbf{H}_{n-1}$. Ce minimum étant atteint pour $u_n \in \mathbf{H}_{n-1}$, on obtient le résultat voulu.

On peut alors énoncer le Minimax Principe dans une seconde version que nous utiliserons dans la preuve de la loi de Weyl.

PROPOSITION :

$$\lambda_n = \inf_{X \in \phi_n(V)} \sup_{u \in X} \rho(u)$$

où $\phi_n(V) = \{\text{sous-espaces de dimension } n \text{ } X \subset V\}$

La preuve utilise la première version du Minimax Principe. En effet, étant donné que $Vect(u_1, \dots, u_n) \in \phi_n(V)$:

$$\lambda_n = \sup_{u \in Vect(u_1, \dots, u_n)} \rho(u) \geq \inf_{X \in \phi_n(V)} \sup_{u \in X} \rho(u)$$

Réciproquement, pour tout $X \in \phi_n(V)$, il existe $v \in V \cap H_{n-1}$ non nulle. On obtient :

$$\rho(v) \geq \inf_{u \in H_{n-1}} \rho(u) = \lambda_n$$

Puis on peut faire un passage au sup, puis à l'inf à gauche et on obtient le résultat.

Enfin, nous allons démontrer la loi de Weyl dans le cas du carré. Cette dernière étape permettra de prouver la loi de Weyl en toute généralité. Nous prouverons donc ce résultat dans \mathbb{R}^n où n est un entier naturel non nul. Supposons sans pertes de généralités que notre domaine est :

$$\Omega = [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n]$$

où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. En effet, en prouvant le résultat pour un tel cube, on montre le résultat pour tous les cubes de même dimension obtenu par isométrie i.e translation ou rotation. En séparant les variables, on obtient les états propres et les valeurs propres du Laplacien :

$$\varphi_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \sin \frac{i_k \pi}{a_k} x_k$$

et

$$\lambda_{i_1, \dots, i_n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{i_k \pi}{a_k} \right)^2$$

On veut donc estimer asymptotiquement la fonction de comptage telle qu'elle est définie dans l'article de Kac. Pour cela, nous allons chercher à majorer et minorer cette fonction de comptage en utilisant des considérations géométriques pour caractériser les valeurs propres. En effet, soit λ un réel argument de la fonction de comptage. Alors :

$$\mathcal{N}(\lambda) = |\{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \text{ tq } \lambda_{i_1, \dots, i_n} \leq \lambda\}|$$

On considère donc l'ensemble \mathbf{A}_λ définit de la façon suivante :

$$A_\lambda = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k \pi}{\sqrt{\lambda} a_k} \right)^2 \leq 1 \text{ et } x_1, \dots, x_n \geq 0 \right\}$$

On identifie les valeurs propres du Laplacien avec les points à coordonnées entières de A_λ . Ainsi, A_λ représentant une partie d'une hyperellipse. A chacune de ces coordonnées entières, on identifie un carré d'aire 1 du plan. On peut donc majorer $\mathcal{N}(\lambda)$ avec le volume de A_λ . D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\lambda) &\leq Vol(A_\lambda) \\ &\leq \frac{Vol(B(0, 1))}{2^n} \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{\lambda} a_k}{\pi} \\ &\leq c_n Vol(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

où c_n est définit comme dans l'énoncé de la loi de Weyl ci-dessus.

Pour obtenir une minoration de la fonction de comptage, nous allons, à nouveau, utiliser des considérations géométriques. Pour cela, nous allons translater A_λ d'une unité vers le bas et d'une vers la gauche. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\lambda) &\geq Vol(A_\lambda) - \sum_{k=1}^n \frac{a_k \sqrt{\lambda}}{\pi} \\ &\geq c_n Vol(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} - \frac{L(\partial\Omega) \sqrt{\lambda}}{2\pi} \end{aligned}$$

On obtient alors la loi de Weyl sur un carré pour un espace de dimension supérieure ou égale à 2

Nous allons maintenant passer à la preuve du théorème de Weyl énoncer au début de ce document. Cette preuve sera divisée en 2 étapes. Dans un premier temps, nous allons montrer la loi de Weyl pour un domaine pouvant être représenté comme une union dénombrable de cubes dont on sait d'après ce qui a été fait ci-dessus que la loi de Weyl y est valable.

Dans un second temps, nous approcherons un domaine quelconque par l'extérieur avec un domaine étant une union dénombrable de cube et de l'intérieur avec un domainedu même type.

Commençons par le premier cas et supposons que le domaine Ω est une union finie de cubes $\{Q_i\}_i$.

Nous allons maintenant distinguer les valeurs propres dans les conditions au bord de Dirichlet et de Neumann. Ainsi, nous noterons respectivement $\{\mu_k(Q_i)\}_{k,i}$ et $\{\nu_k(Q_i)\}_{k,i}$ les collections des valeurs propres de Dirichlet de Neumann. Nous allons ensuite les mettre en commun et les ordonner de telle sorte que l'on notera : $\{\tilde{\mu}_k\}_k$ et $\{\tilde{\nu}_k\}_k$ les valeurs propres de Dirichlet et de Neumann sur l'ensemble des cubes classées dans l'ordre croissant.

On définit ainsi 2 nouveaux ensembles :

$$\tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u|_{Q_i} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \forall i\}$$

et

$$\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u|_{Q_i} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \forall i\}$$

On peut remarquer que l'on a la chaîne d'inclusion suivante :

$$\tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega) \subset \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$$

De façon analogue au minimax principe démontrer ci-dessus, on peut donner une variante dans le contexte que l'on vient de détailler :

$$\tilde{\mu}_k = \inf_{X \in \phi_k(\tilde{\mathbf{H}}_0^1)} \sup_{u \in X} \tilde{\rho}(u)$$

et

$$\tilde{\nu}_k = \inf_{X \in \phi_k(\tilde{\mathbf{H}}^1)} \sup_{u \in X} \tilde{\rho}(u)$$

où on définit $\tilde{\rho}(u) = \frac{\sum \|u'\|_{L^2(Q_i)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$

Ainsi, comme on minimise une quantité sur des ensembles de plus en plus grands, on obtient les inégalités suivantes :

$$\tilde{\nu}_k \leq \nu_k \leq \mu_k \leq \tilde{\mu}_k$$

Ainsi, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut lui appliquer la fonction de comptage par rapport à chacune de ces valeurs propres :

$$\mathcal{N}_{\tilde{\mu}_k}(\lambda) \leq \mathcal{N}_{\mu_k}(\lambda) \leq \mathcal{N}_{\nu_k}(\lambda) \leq \mathcal{N}_{\tilde{\nu}_k}(\lambda)$$

Or, connaissant la loi de Weyl sur des cubes :

$$\mathcal{N}_{\mu,i}(\lambda) = c_n \text{Vol}(Q_i) \lambda^{n/2} + o(\lambda^{n/2})$$

Or le domaine Ω étant une union dénombrable de cube, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mu}(\lambda) &= \sum_i \mathcal{N}_{\mu,i}(\lambda) \\ &= c_n \lambda^{n/2} \sum_i \text{Vol}(Q_i) + o(\lambda^{n/2}) \\ &= c_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{n/2} + o(\lambda^{n/2}) \end{aligned}$$

De façon analogue, on obtient également :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\nu}(\lambda) &= \sum_i \mathcal{N}_{\nu,i}(\lambda) \\ &= c_n \lambda^{n/2} \sum_i \text{Vol}(Q_i) + o(\lambda^{n/2}) \\ &= c_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{n/2} + o(\lambda^{n/2}) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'encadrement suivant :

$$c_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{n/2} + o(\lambda^{n/2}) \leq \mathcal{N}_{\nu}(\lambda) \leq \mathcal{N}_{\mu}(\lambda) \leq c_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{n/2} + o(\lambda^{n/2})$$

Par théorème d'encadrement, on obtient l'équivalence quand λ tend vers l'infini énoncée dans la loi de Weyl. Cela conclue la première étape.

La deuxième étape consiste maintenant à approcher en excès et en deça un volume Ω quelconque avec des volumes étant des unions dénombrables de cubes sur lesquels nous venons de démontrer la loi de Weyl.

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe Ω_1 et Ω_2 deux domaines bornés tels que : $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$ et $\text{Vol}(\Omega_2 \setminus \Omega_1) < \varepsilon$.

La caractérisation variationnelle donnée par le minimax principe permet en considérant les inclusions de ces différents ensembles d'obtenir les inégalités suivantes :

$$\mu_n(\Omega_2) \leq \mu_n(\Omega) \leq \mu_n(\Omega_1)$$

Puis, en appliquant la fonction de comptage pour un $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{N}_{\mu,\Omega_1}(\lambda) \leq \mathcal{N}_{\mu,\Omega}(\lambda) \leq \mathcal{N}_{\mu,\Omega_2}(\lambda)$$

Cet encadrement va permettre par des passages aux limites supérieure et inférieure d'obtenir l'équivalent voulu. En effet :

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_{\mu, \Omega}(\lambda)}{\lambda^{n/2}} \leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_{\mu, \Omega_2}(\lambda)}{\lambda^{n/2}} \leq c_n \text{Vol}(\Omega_2) \leq c_n (\text{Vol}(\Omega) + \varepsilon)$$

et de façon analogue :

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_{\mu, \Omega}(\lambda)}{\lambda^{n/2}} \geq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_{\mu, \Omega_1}(\lambda)}{\lambda^{n/2}} \geq c_n \text{Vol}(\Omega_1) \geq c_n (\text{Vol}(\Omega) - \varepsilon)$$

ε étant choisi arbitrairement petit, on obtient alors de cet encadrement l'équivalent voulu :

$$N_{\mu, \Omega}(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{n/2}$$

Cela termine la démonstration de la loi de Weyl en toute généralité et justifie donc son utilisation dans l'article de Kac.

4 Première étude qualitative des travaux de Zelditch-Hezari et d'Avila-de Simoi-Kaloshin

Zelditch a montré le résultat suivant en 2019 avec Hamid Hezari :

Les ellipses de faible excentricité sont spectralement déterminées parmi tous les domaines lisses du plan.

Cela signifie que si les valeurs propres avec le domaine à bords lisses Ω sont égaux à celles d'une ellipse E_e dont l'excentricité e est petite, alors $\Omega = E_e$ (plus précisément, Ω est isométrique à E_e).

La démonstration de Zelditch prend un chemin tout à fait différent par rapport à celui emprunté par Kac et elle est basée sur la rigidité des ellipses. Elle s'inspire néanmoins du lien qui apparaît entre argument analytique via l'étude des invariants spectraux et argument géométrique via l'inégalité isopérimétrique pour obtenir la rigidité spectrale.

4.1 Système dynamique d'une table de billard

4.1.1 Introduction

On travaille sur le système dynamique d'une table de billard. On introduit d'abord les notations que l'on va utiliser. On se basera sur le livre de Tabachnikov, voir [3].

Notons Ω la table du billard, $\partial\Omega$ la frontière, $l = |\partial\Omega|$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ l'angle d'incidence et $s \in \partial\Omega$ un point de la frontière. On introduit la fonction billard :

$$\beta : \mathbf{R}/l\mathbf{Z} \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}/l\mathbf{Z} \times [-\pi, \pi] \quad (73)$$

définie par $\beta(s_1, \theta_1) = (s_2, \theta_2)$ où s_1 est le point de réflexion, θ_1 l'angle d'incidence et s_2 et θ_2 respectivement le prochain point de réflexion, le prochain angle d'incidence en respectant les lois de Snell-Descartes. Voir FIG.2

4.1.2 Caustique

Dans le cas où Ω est une ellipse, on peut s'intéresser aux courbes appelées *caustiques* pour étudier ce système dynamique. Une *caustique* est un lacet du plan tel que toute trajectoire de billard tangent à cette courbe reste tangent après rebonds successifs sur le bord de Ω . Dans une ellipse, on peut grouper les caustiques selon les trajectoires de billards en trois groupes (FIG.1) :

- Les trajectoires passant par les foyers. (en jaune)
- Les trajectoires passant entre les foyers : la caustique est une hyperbole. (en violet)
- Les trajectoires passant en dehors des foyers : la caustique est une ellipse. (en bleu)

4.1.3 Trajectoires périodiques et intégrables rationnellement

Étant donné une trajectoire périodique γ , on définit le nombre de rotation de $\frac{p}{q}$ avec p le nombre de tours et q le nombre de rebonds lors d'une période (parcours du chemin fermé).

Quelques définitions nous seront utiles :

1. Une caustique intégrable rationnelle $\Gamma \subseteq \Omega$ est une caustique telle que les orbites tangentes à elles sont périodiques.
2. Ω est intégrable rationnellement si l'application de billard sur Ω admet des caustiques rationnels de nombre de rotation p/q .

On note $\Gamma(1, q)$ une trajectoire de nombre de rotation $\frac{1}{q}$ et $L\Gamma(1, q)$ la longueur de cette trajectoire

4.1.4 Les théorèmes importants de la rigidité d'ellipses.

1. (Conjecture de Birkhoff) : Les seuls billards strictement convexes intégrables sont des ellipses. Dire qu'un billard est intégrable signifie que la réunion de tous les caustiques convexes ont un intérieur non vide dans Ω
2. (Avila-De Simoi-Kaloshin) : Une table de billard qui est rationnellement intégrable et qui est "presque" circulaire (dans un sens à définir) doit être une ellipse.
3. (Kaloshin-Sorrentino) : Une table de billard qui est rationnellement intégrable et qui est suffisamment proche d'une ellipse doit être une ellipse.

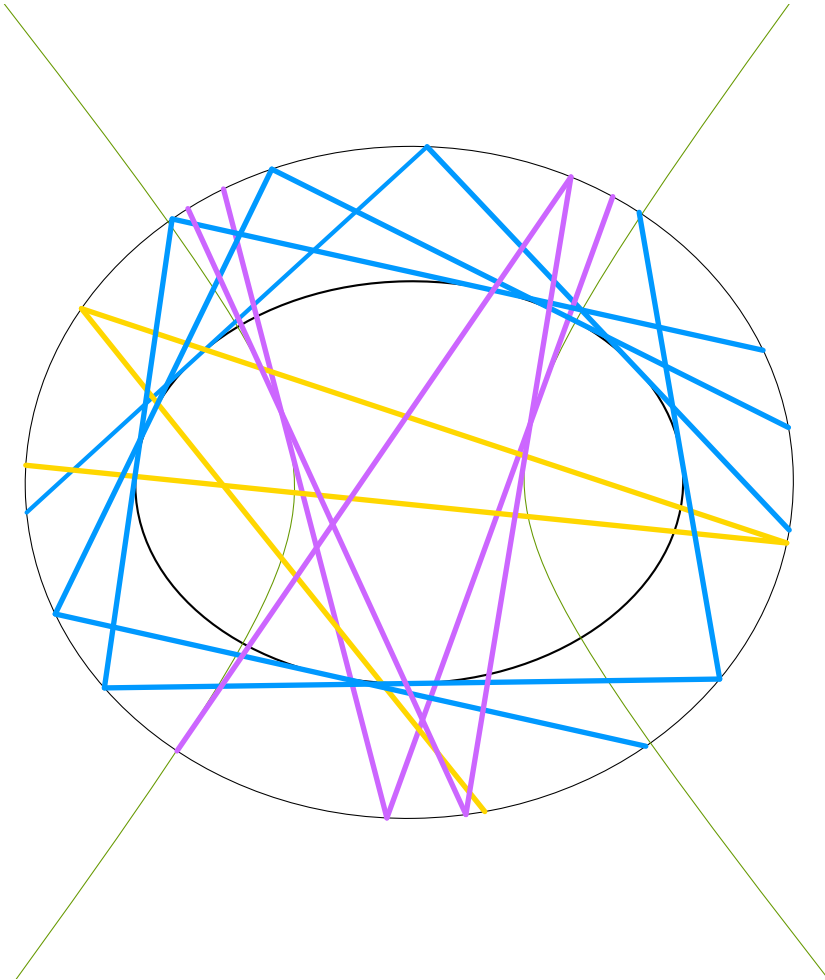


FIGURE 1 – Différents types de caustiques pour une ellipse

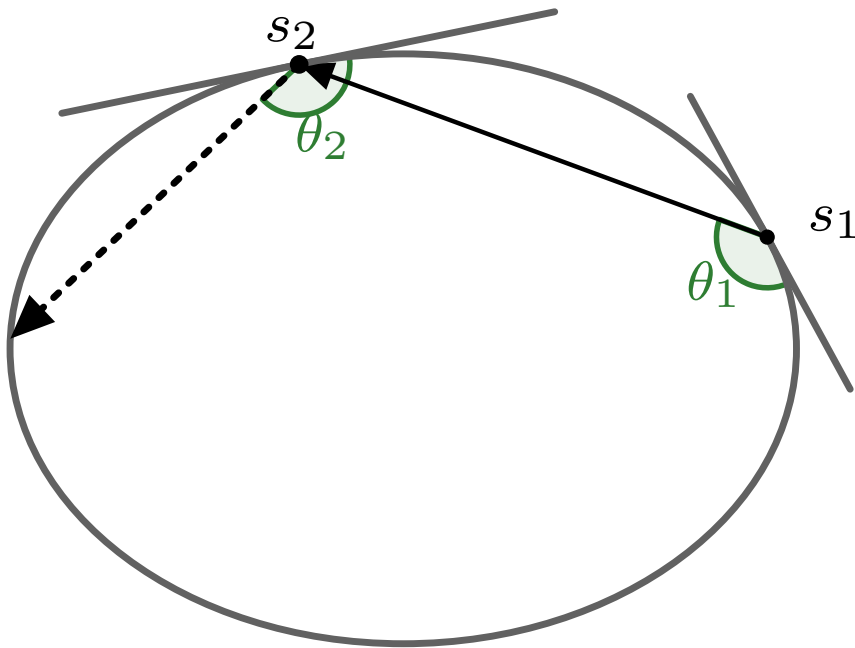


FIGURE 2 – Trajectoire de billard

4.1.5 Plan global de la démonstration

Précisons avant de donner le plan global de la démonstration que les numérotations utilisées pour les théorèmes et lemmes seront les mêmes que celles utilisées par les auteurs dans leur papier afin de permettre au lecteur de s'y référer rapidement. Le résultat principal énoncé par Zelditch est le théorème suivant :

THÉORÈME : 1.1

Il existe e_0 tel que toute ellipse d'excentricité plus faible que e_0 est uniquement déterminée par le spectre de son Laplacien avec conditions de Dirichlet ou de Neumann au bord parmi tous les domaines lisses.

La preuve de ce théorème se décompose en deux arguments d'horizons différents.

Le premier est un argument de dynamique développé dans le papier d'Avila-Kaloshin-De Simoi qui consiste à prouver que le domaine considéré Ω est rationnellement intégrable et proche de l'ellipse d'une façon que l'on précisera. Voici l'énoncé du dit théorème :

THÉORÈME : *Main theorem*

Il existe $e_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $0 \leq e \leq e_0$, tout domaine Ω rationnellement intégrable, \mathcal{C}^{39} -lisse et $\mathcal{C}^{39} - \varepsilon$ -proche de l'ellipse \mathcal{E}_e est une ellipse.

En pratique, nous utiliserons une version plus forte de ce théorème qui ne nécessite pas autant d'information sur la 39ème dérivée :

THÉORÈME : 25

Soit e_* suffisamment petit. Pour tout $0 \leq e_0 \leq e_*$ et $K > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $0 \leq e \leq e_0$, tout domaine Ω rationnellement intégrable \mathcal{C}^{39} -lisse, $\mathcal{C}^{39} - K$ -proche et $\mathcal{C}^1 - \varepsilon$ -proche de l'ellipse \mathcal{E}_e est une ellipse.

L'objectif de Hezari-Zelditch sera de montrer qu'un domaine Ω lisse et isospectral à une ellipse est une ellipse en se ramenant au théorème ci-dessus par des arguments analytiques divers.

Tout d'abord, une analyse de la formule des traces de la chaleur et de ses invariants permettra de contrôler la taille de l'écart entre les courbures du domaine Ω et de l'ellipse et finalement de montrer que Ω est quasi-circulaire dans un sens que nous préciserons.

Cette analyse permettra à la suite de montrer que cette trace est déterminée par $\bigcup_{q \geq 2} L\Gamma(1, q)$ pour tous les domaines quasi-circulaires.

Par la suite, la structure particulière des bandes des longueurs des caustiques permettra d'appliquer une fonction *cut-off* à la trace pour étudier les longueurs d'orbites $(1, q)$ -périodiques pour chaque q indépendamment des autres et pour $q \geq 3$.

On calculera ensuite que cette fonction *cut-off* pour Ω doit être égale à celle d'une ellipse, ce qui impliquera que toutes les boucles sont des trajectoires de billard fermées et qu'il existe une boucle pour tous les points de la frontière, autrement dit Ω sera rationnellement intégrable. L'analyse des invariants donnera le caractère proche de l'ellipse et permettra d'appliquer le théorème énoncé par Avila-Kaloshin-De Simoi.

Tout notre travail va consister à reparcourir ces preuves en essayant de calculer explicitement la constante naturelle apparaissant dans le théorème et à encadrer les excentricités pour lesquelles ces énoncés sont valables.

5 Étude de l'article d'Avila, de Simoi et Kaloshin

5.1 Présentation des objectifs et du travail effectué

Notre objectif était de comprendre et d'optimiser le premier gros résultat de l'article "An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse" d'A.Avila, J.deSimoi et V.Kaloshin.

Ce théorème, référencé dans l'article comme théorème 3, donne une majoration de l'éloignement entre le périmètre d'une trajectoire de billard périodique dans l'ellipse initiale et dans l'ellipse déformée, à un facteur de déformation près (que l'on connaît).

Cette majoration fait apparaître une constante C qui dépend explicitement de l'excentricité.

Nous nous sommes donc plongés dans l'article et il a fallu, avant toutes choses, débroussailler les notations et les différents outils mathématiques utilisés en systèmes dynamiques et dont nous n'avions pas l'habitude, par exemple le paramétrage en coordonnées de Lazutkin. Puis, nous avons refait le cheminement d'Avila, deSimoi et Kaloshin, en gagnant en précision sur certaines constantes. Pour notre étude, l'on se référera aux définitions de la dynamique des billards données dans la section précédente. Par soucis de cohérence avec l'article de Avila, deSimoi et Kaloshin, et éviter d'ajouter des facteurs 2π superflus, nous considérerons dans cette partie des ellipses de périmètre unité.

Pour améliorer la lisibilité et la compréhension du lecteur, nous détaillerons surtout l'intérêt des résultats dans l'avancée de notre travail, et mettrons dans cette section les idées clés des preuves ainsi que les arguments visuels. Toutefois, pour le détail des calcul, l'on pourra se référer à la section annexe disponible en fin de partie.

5.2 Notations, coordonnées longueur d'arc et action-angle

- \mathcal{E}_e : ellipse de départ, de périmètre 1 et d'excentricité e
- $f = f_{\mathcal{E}_e}$: table de billard associée
- Ω : Domaine convexe, de bord $\delta\Omega$ (on a donc $\delta\Omega_0 = \mathcal{E}_e$)
- $\delta\Omega_\varepsilon = \delta\Omega_0 + \varepsilon \mathbf{n}$: perturbation de l'ellipse, on a $\varepsilon = \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1}$
- $\omega = 1/q$, $q \in \mathbb{N}^*$: nombre de rotation de la trajectoire de billard sur l'ellipse.
- $\hat{\Gamma}_\omega$: Caustique de nombre de rotation ω , Γ_ω la courbe invariante correspondante
- (S, ϕ) : paramétrisation de \mathcal{E}_e selon la longueur d'arc
- θ , coordonnées (θ, ω) ou action-angle : Paramétrisation de \mathcal{E}_e telle que f agisse comme une rotation rigide d'angle ω , c'est-à-dire tel que

$$f(S(\theta; \omega), \phi(\theta; \omega)) = S(\theta + \omega; \omega), (\phi(\theta + \omega; \omega))$$

- $S_q = S(\cdot, 1/q)$, $\phi_q = \phi(\cdot, 1/q)$: notations condensées
- $\theta_k = \theta + k/q$
- $P_k^0(\theta) = P_{S_q(\theta+k/q)}$: k -ème point de rebond sur \mathcal{E}_e (donc k -ème point du q -gone tangent à $\hat{\Gamma}_{1/q}$, dont la longueur d'arc à partir de P_0 est $S_q(\theta + k/q)$ (en tournant dans le sens trigonométrique)
- $P'_k(\theta)$: k -ème point du q -gone dans l'orbite perturbée.
- $\bar{P}'_k(\theta)$: projeté orthogonal de $P'_k(\theta)$ sur \mathcal{E}_e
- $\varphi_k(\theta) = \phi_q(\theta + k/q)$: angle de réflexion au k -ème point
- $L_q^0(\theta) = \sum_{k=0}^{q-1} \|P_{k+1}^0(\theta) - P_k^0(\theta)\|$: périmètre du q -gone initial
- $L'_q(\theta) = \sum_{k=0}^{q-1} \|P'_{k+1}(\theta) - P_k^0(\theta)\|$: périmètre du q -gone perturbé

- $v_k(\theta) = ||P'_k(\theta) - P_k^0(\theta)||$: longueur du déplacement au point P_k
- $l_k^0(\theta) = ||P_{k+1}(\theta) - P_k(\theta)||$, $l'_k(\theta)$ analogue.
- $\bar{\varphi}_k^+$ (resp. $\bar{\varphi}_k^-$) : angle entre $\bar{P}'_{k+1}(\theta) - \bar{P}'_k(\theta)$ (resp. $\bar{P}'_k(\theta) - \bar{P}'_{k+1}(\theta)$) et la tangente à \mathcal{E}_e en $\bar{P}'_k(\theta)$
- $\mathcal{D}\left(\mathbf{n}, S, \phi, \frac{p}{q}\right)(\theta) = 2 \sum_{k=0}^{q-1} \mathbf{n} \left(S \left(\theta + k \frac{p}{q}; \frac{p}{q} \right) \right) \sin \phi \left(\theta + k \frac{p}{q}; \frac{p}{q} \right)$: fonction de déformation (Fourier)
- Donc $\mathcal{D}\left(\mathbf{n}, S, \phi, \frac{1}{q}\right)(\theta) = 2 \sum_{k=0}^{q-1} \mathbf{n} \left(S_q \left(\theta + \frac{k}{q} \right) \right) \sin \varphi_k(\theta)$ (utile dans le théorème 3)

5.3 Coordonnées de Lazutkin

À de nombreuses reprises, nous utiliserons le formalisme de Lazutkin détaillé dans son article de 1973, voir [4]. Dans cet article, Lazutkin introduit un changement de variable adapté à l'étude d'une ellipse, réduisant l'équation dynamique de la table de billard à une forme très simplifiée $(x, y) \mapsto (x + y, y)$.

- Changement de variables Lazutkin/longueur d'arc :

$$\Psi_L : (s, \varphi) \mapsto \left(x = C_\Omega \int_0^s \rho^{-2/3}, y(s, \varphi) = 4C_\Omega \rho(s)^{1/3} \sin(\varphi/2) \right)$$

où C_Ω est une constante de normalisation dépendant uniquement du rayon de courbure.

- $(X(\theta, \omega), Y(\theta, \omega)) = \Psi_L(S(\theta, \omega), \phi(\theta, \omega))$: Changement de variable Lazutkin/action-angle
- $(X_q(\theta), Y_q(\theta)) = X(\theta, 1/q), Y(\theta, 1/q)$: Notations condensées

Les coordonnées de Lazutkin réduisent les tables de billard à une expression très simple :

- Paramétrisation de l'ellipse en coordonnées de Lazutkin :

$$f_L : (x, y) \mapsto (x + y + y^3 g(x, y), y + y^4 h(x, y))$$

Où g et h sont des fonctions pouvant s'exprimer à l'aide des trois premières dérivées du rayon de courbure ρ

En particulier, pour une ellipse, la transformation d'un point d'impact en le suivant sera $(x, y) \mapsto (x + y, y)$.

NB : Tous les objets mentionnés ci-dessus dépendant du paramètre θ , nous omettrons parfois de l'écrire afin de gagner en lisibilité.

5.4 Sur le contrôle de la variation de longueur d'une trajectoire en q rebond après déformation

5.4.1 Lemme 8 : approximation des points de rebonds selon les coordonnées de Lazutkin

LEMME : 8

Soit Ω un domaine strictement convexe de classe \mathcal{C}^5 . Pour $k \in \mathbb{Z}$, soient $(x_k, y_k) = f_L^k(x_0, y_0)$ une orbite périodique de nombre de rotation $1/q$, $q > 2$ (en coordonnées de Lazutkin). Alors il existe une constante C_8 ne dépendant que du rayon de courbure ρ , telle que pour $0 \leq k < q$,

$$|y_k - \frac{1}{q}| < \frac{C_8}{q^3} \quad \text{et} \quad |\tilde{x}_k - \tilde{x}_0 - \frac{k}{q}| < \frac{C_8}{q^2}$$

où \tilde{x}_k est le relèvement de x_k sur \mathbb{R} .

Le lemme 8 est technique et abstrait car le cadre est celui des coordonnées de Lazutkin, extrêmement pratique pour effectuer les calculs mais dans lequel on perd toute intuition géométrique. L'idée ici est d'abord d'utiliser les tiroirs de Dirichlet : les distance entre chaque rebonds ne peuvent pas être toute trop grandes ou trop petites car les trajectoires considérée on un nombre de rotation de type $1/q$ (elle font un tour en q rebonds). Nous utilisons ensuite le formalisme de Lazutkin et la dynamique des billards pour propager ce contrôle aux autre rebonds. C'est ce résultat qui est par la suite exploité dans la proposition 10.

5.4.2 Proposition 10 : contrôle de la distance entre deux rebonds consécutifs

PROPOSITION : 10 :

Soit Ω un domaine strictement convexe qu'on suppose au moins de classe \mathcal{C}^5 et $q > 2$ (pour la preuve, on supposera $q \gg 2$). Soit un orbite q -périodique (s_k, φ_k) de nombre de rotation $1/q$, on note $(P_k), k \in [0, \dots, q - 1]$ les points de collision sur les bords $\delta\Omega$.

Alors il existe une constante $C_{10} > 1$, ne dépendant que du rayon de courbure ρ , telle que la distance euclidienne entre deux points consécutifs $\|P_{k+1} - P_k\|$ vérifie :

$$\frac{1}{C_{10}q} \leq \|P_{k+1} - P_k\| \leq \frac{C_{10}}{q}$$

L'intérêt de cette proposition est de donner un contrôle sur les distance entre deux rebonds indépendamment de q . L'article étudié se contente de résultat d'existence, nous avons donc travaillé pour obtenir des résultats constructivistes.

Les outils utilisés sont multiples, il nous faut d'abord passer du formalisme de Lazutkin à la géométrie euclidienne, nous utilisons la géométrie pour trouver des bornes en considérant les cas extrémaux sur le rayon de courbure (voir FIG 3) ainsi que des inégalités de convexités propre à l'analyse.

Nous faisons ensuite de l'analyse à deux échelles : à l'aide d'une majoration à partir d'un certain rang connu et d'une majoration en fonction de q , nous pouvons déterminer une majoration pour tout q . Ayant déterminé un certain q_0 grand à partir duquel nous avons un contrôle explicite sur les distances. Nous pouvons déterminer une constante pour les $q < q_0$ qui sont en nombre fini et prendre la constante la plus grande.

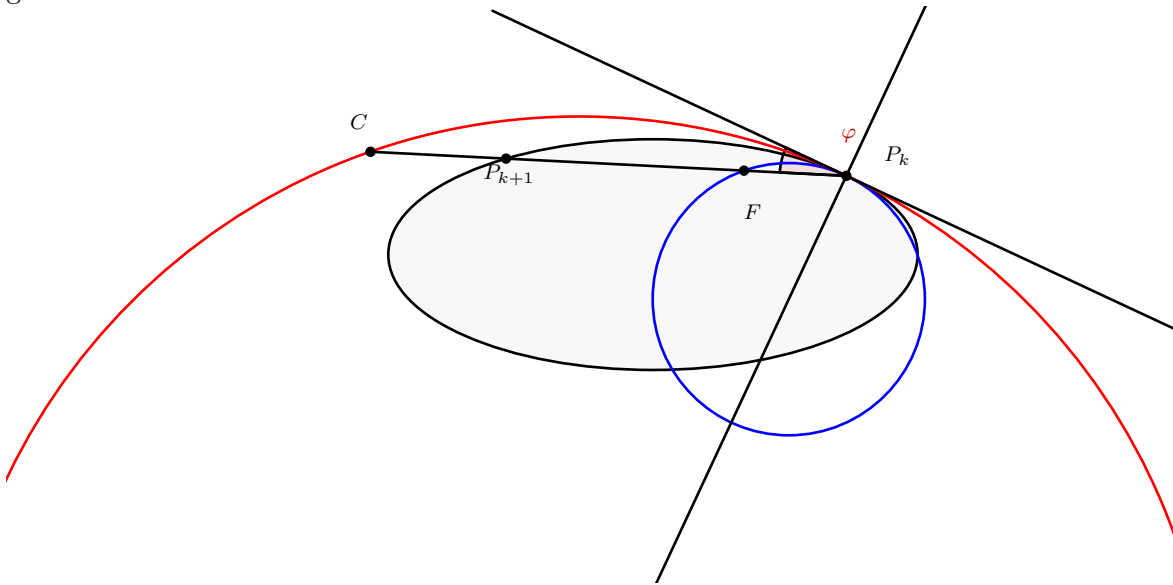


FIGURE 3

5.4.3 Lemmata 4 et 5 : Contrôle des angles de rebond

LEMME : 4

Soient (P_k) les q points la trajectoire de billard initiale, (P'_k) ceux de la trajectoire perturbée, et enfin (\bar{P}'_k) leurs projetés orthogonaux sur l'ellipse \mathcal{E} . Par construction, P_0 coïncide avec \bar{P}'_0 (cf schéma ci-dessous pour clarifier les notations). On définit en outre pour $k \in \{0, \dots, q - 1\}$, l'angle $\bar{\varphi}_k^+$ (resp. $\bar{\varphi}_k^-$) comme l'angle entre $\bar{P}'_{k+1} - \bar{P}'_k$ (resp. $\bar{P}'_k - \bar{P}'_{k-1}$) et la tangente positive (resp. négative) à \mathcal{E} au point \bar{P}'_k .

Après un contrôle sur les longueurs donné par le corollaire 10, nous cherchons ici un contrôle sur les angles des rebonds. Nous faisons de nouveau une étude géométrique pour déterminer les cas extrémaux et les bornes

associées. L'intérêt de ce lemme et que nous contrôlons désormais non pas la trajectoire mais l'écart entre la trajectoire initiale et la trajectoire perturbée.

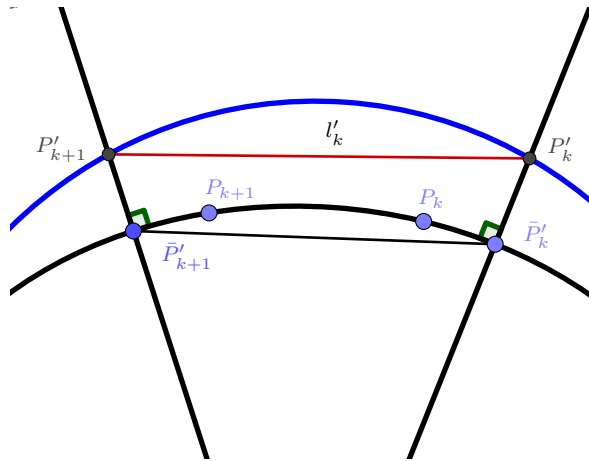


FIGURE 4

Alors on a pour tout $0 \leq k < q$,

$$|\bar{\varphi}_k^+ - \bar{\varphi}_k^-| \leq 5C_{10}q \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1} \quad (74)$$

Où C_{10} est la constante donnée par le corollaire 10 étudié antérieurement.

LEMME : 5

Pour tout $k < q$, soit $\bar{\theta}_K$ tel que $\bar{P}'_k(\theta) = P_{S_q}(\bar{\theta}_k)$. Il existe alors C_5 dépendant de l'excentricité et des dérivées de \mathbf{n} (les 5 premières d'après Avila, Kaloshin et DeSimoï), tel que pour tout $k < q$,

$$|\bar{\theta}_k - \theta_k| \leq C_5q^3 \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1} \quad \text{et} \quad v_k(\theta) \leq C_5q^3 \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1} \quad (75)$$

Le lemme 5 a pour but de combiner les résultats précédents et de les transposer dans les coordonnées action-angle. Le passage dans ces coordonnées est extrêmement laborieux et technique, il s'agit notamment de contrôler les bijections réciproques d'intégrales elliptiques. Nous donnons en annexes des pistes à suivre mais nous ne sommes pas parvenu à extraire de constante explicite.

5.4.4 Lemme 6 et théorème 3 : contrôle de la variation de longueur suite à la déformation

LEMME : 6 :

Avec les notations précédentes, nous avons :

$$\left| l'_k(\theta) - l_k^0(\theta) - v_k(\theta) \cos(\varphi_k(\theta) + \alpha_k(\theta)) + v_{k+1}(\theta) \cos(\varphi_{k+1}(\theta) - \alpha_{k+1}(\theta)) \right| \leq 10 \frac{v_k(\theta)^2 + v_{k+1}(\theta)^2}{l_k^0(\theta)} \quad (76)$$

La preuve de l'article ici était d'une précision suffisante et qu'un travail plus poussé ne permettrait pas d'améliorer la constante donnée significativement. Cette preuve est elle aussi d'essence géométrique et fait le lien entre les résultats obtenus jusqu'à lors.

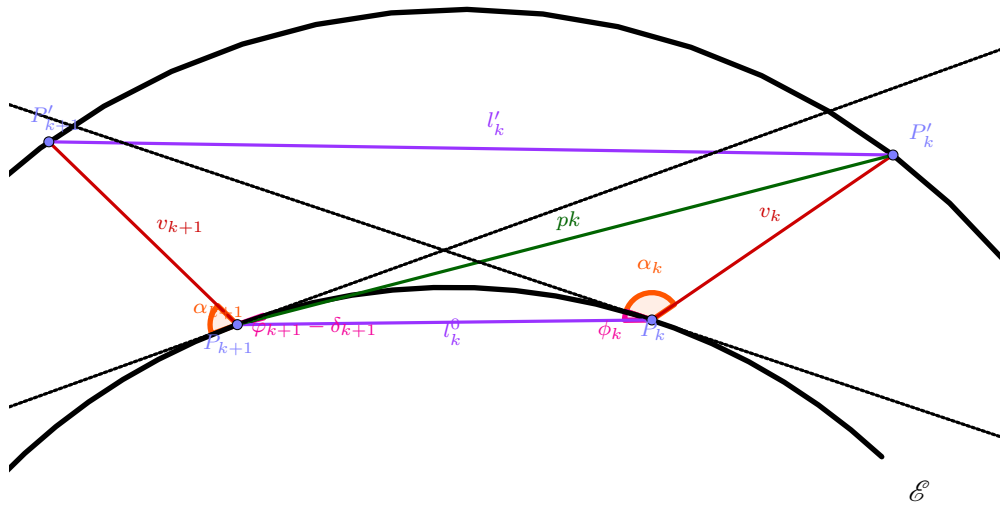


FIGURE 5

THÉORÈME : 3 :

Soit \mathcal{E}_e ellipse d'excentricité $e < 1$ et de périmètre 1, et (S, ϕ) la transformation correspondante (cf section notations). Alors il existe une constante $C_3 > 0$ dépendant de e telle que pour tout entier $q > 2$ et toute déformation de classe \mathcal{C}^5 $\delta\Omega = \mathcal{E}_e + \mathbf{n}$, Ω admet une caustique rationnellement intégrable $\Gamma_{1/q}$ de nombre de rotation $1/q$ et $q^8 \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1} < C_3$, telle que :

$$\max_{\theta} |L'_q(\theta) - L_q^0(\theta) - \mathcal{D}(\mathbf{n}, S, \phi; 1/q)(\theta)| \leq C_3 q^8 \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1}^2 \tag{77}$$

Premier résultat conséquent de l'article, nous montrons ici que le lagrangien de la trajectoire perturbée (qui n'est autre que sa longueur) et proche de celui de la trajectoire initiale à laquelle nous ajoutons une correction. Cette correction est le terme D qui peut s'interpréter comme une transformée de Fourier de la déformation. La preuve en elle même n'est pas très compliquée, le travail technique ayant été fait au cours des lemmes précédents.

5.5 Construction des modes propres de Fourier pour la déformation

5.5.1 Lemme 11 : Approximation des points de rebond en coordonnées de Lazutkin

LEMME : 11.

Soit \mathcal{E}_e une ellipse d'excentricité e et de périmètre 1. Alors, il existe une constante C_{11} qui tends vers 0 avec e tel que

$$\|X_q - Id\|_{\mathcal{C}^1} \leq \frac{C_{11}}{q^2} \tag{78}$$

Ce lemme montre l'intérêt des coordonnées de Lazutkin, elles donnent une bonne approximation des coordonnées action-angle, approximation dont la précision augmente lorsque l'excentricité diminue et q devient grand. La démonstration est cette fois de nature analytique, nous utilisons le théorème des accroissements finis afin de sélectionner des points de contrôles sur l'ellipse auxquels nous avons une bonne connaissance de X et de ses dérivées. Nous nous servons ensuite des égalités de Taylor avec reste intégral pour étendre ce contrôle au autres points .

5.6 Modes propres de Fourier déformés

La suite de l'article résulte en une preuve par l'absurde : on souhaite aboutir au fait que, pour toute déformation rationnellement intégrable à ε près d'une ellipse, il existe une ellipse qui en est une meilleure approximation (toujours à condition que $e < e^*$). Ainsi, en appliquant ce résultat à la meilleur approximation de Ω par une ellipse, on obtient la contradiction.

Pour construire cette "meilleure approximation", nous allons utiliser la base de l'espace L^2 des coefficients de Fourier. Cette intuition est motivée par un résultat caractérisant les coefficients de Fourier d'une ε -déformation d'un cercle énoncé par Ramirez-Ros [5] en 2006 :

THÉORÈME : Ramirez-Ros

Soit Ω_ε une ε -déformation du cercle unité, id est $\delta\Omega_\varepsilon = [(r, \phi) \mapsto (1 + \varepsilon n(\phi) + O(\varepsilon^2), \phi)]$ en coordonnées. Si Ω_ε admet des caustiques rationnellement intégrables de nombre de rotation $1/q$, les coefficients multiples de q dans le développement en série de Fourier de $n(\phi) = \sum n'_k \cos(k\phi) + n''_k \sin(k\phi)$ sont nuls.

Ainsi, pour une déformation rationnellement intégrable, il reste uniquement les 5 termes d'ordre 0, 1 et 2 :

$$n(\phi) = n_0 = n'_1 \cos(\phi) + n''_1 \sin(\phi) + n'_2 \cos(2\phi) + n''_2 \sin(2\phi)$$

Tentons d'extrapoler ce résultat aux ellipses de faible excentricité. On cherche donc à construire une nouvelle base (c_q, s_q) dite "modes de Fourier déformés" pour l'ellipse, puis à quantifier la distance de ces vecteurs aux vecteurs de la base de Fourier ($x \mapsto \cos(2\pi qx)$, $x \mapsto \sin(2\pi x)$)

Pour construire ces modes déformés c_q et s_q , on souhaite :

- Obtenir une base de l'espace L^2
- Telle que, lorsque l'excentricité tends vers 0, on retrouve la base de Fourier
- Orthogonale pour la mesure de Lazutkin

Par le lemme 8, et la définition de la deuxième coordonnée de Lazutkin $y = 4C_\Omega \rho(x)^{1/3} \sin(\varphi/2)$, on a :

$$|4C_\Omega \rho(x)^{1/3} \sin(\varphi/2) - \frac{1}{q}| \leq \frac{C_8}{q^3} \tag{79}$$

Posons $\omega_q := q \sin(\pi/q)/\pi \in [1/2, 1]$.

$$|2 \sin(\varphi/2) \omega_q - \frac{\omega_q}{2C_\Omega \rho^{1/3} q}| \leq \frac{C_8 \omega_q}{2C_\Omega \rho^{1/3} q^3} \tag{80}$$

Où $\frac{C_8 \omega_q}{2C_\Omega \rho^{1/3}}$ est borné par rapport à q .

Or comme φ est de l'ordre de $1/q$ ($\varphi \simeq C^*/q + o(1/q)$),

$$|2 \sin(\varphi/2) \omega_q - \sin \varphi| = 2 \sin(\varphi/2) \frac{q}{\pi} \sin(\pi/q) - \sin \varphi \tag{81}$$

$$= 2 \sin(\varphi/2) \left(\frac{q}{\pi} - \cos \varphi/2 \right) \tag{82}$$

$$= 2 \sin(\varphi/2) (O(1/q^2) + \varphi/2 + O((\varphi/2)^2)) \tag{83}$$

$$= \frac{C^*}{q^3} + o(1/q^3) \tag{84}$$

Puis

$$|\sin \varphi - \frac{\omega_q}{2C_\Omega \rho^{1/3} q}| \leq \left(\frac{C_8 \omega_q}{2C_\Omega \rho^{1/3}} + C^* \right) 1/q^3 \tag{85}$$

$$\leq \frac{C''}{q^3} \tag{86}$$

Car le membre de droite dans la première inégalité est un $O(1/q^3)$.

On pose $\eta_q(x) = \sin \phi_q(X_Q^{-1}(x))$, et également $\mu = (2C_\Omega \rho^{1/3})^{-1}$ On a de plus avec l'équation d'avant que

$$\left| \frac{q\eta_q}{\omega_q \mu} - 1 \right| \leq \frac{2C''C_R}{q^2} \quad (87)$$

On peut maintenant définir les modes propres de l'ellipse perturbée, par :

$$\begin{cases} c_q(x) = \frac{q\eta_q}{\omega_q \mu} \frac{1}{X'_q(X_q^{-1}(x))} \cos(2\pi q X_q^{-1}(x)) \\ c_q(x) = \frac{q\eta_q}{\omega_q \mu} \frac{1}{X'_q(X_q^{-1}(x))} \sin(2\pi q X_q^{-1}(x)) \end{cases}$$

D'après le lemme 11, lorsque q tends vers l'infini, les modes propres déformés tendent vers les modes de Fourier d'une ellipse classique. Il nous manque cependant une quantification de la vitesse de convergence de ces modes déformés, qui est donnée par le lemme suivant.

5.6.1 Lemme 12 : Approximation des fonctions s_q et c_q

LEMME : 12

Pour une ellipse d'excentricité e et de périmètre 1, il existe une constante C_{12} qui tends vers 0 avec e , telle que pour tout $q > 2$,

$$\|s_q - x \mapsto \sin(2\pi qx)\|_{\mathcal{C}^0} < \frac{C_{12}}{q}, \|c_q - x \mapsto \cos(2\pi qx)\|_{\mathcal{C}^0} < \frac{C_{12}}{q} \quad (88)$$

La vitesse de convergence est ainsi de l'ordre de $1/q$.

5.6.2 Proposition 22 : définition des premiers coefficients c_q et s_q , construction de la base de L^2

Le but de la proposition 22 est de montrer que les modes déformés sont une base de L^2 pour ça, les auteurs montrent que le changement de base depuis la base de Fourier est inversible. Cela s'obtient en montrant que celui-ci est suffisamment proche de l'identité, ce qui est imposé par les inégalité prouvée précédemment.

5.6.3 Lemme 24 : construction d'une meilleure ellipse

Dans ce lemme les auteurs montrent qu'il est possible de construire une ellipse qui approche de la déformation, en montrant qu'une telle ellipse existe toujours on en conclu que la déformation est elle-même une ellipse ce qui conclu la preuve.

5.7 Théorème principal et résultats obtenus

Au cours de notre étude du travail d'Avila, deSimoi et Kaloshin, nous avons pu voir apparaître de nombreuses constantes, dépendant de l'excentricité de l'ellipse, ainsi que des conditions sur celles-ci. La dernière constante C_{22} amène dans la fin de notre étude une condition suffisante à l'application du résultat de rigidité d'Avila, deSimoi et Kaloshin :

$$C_{22} = C_{22}(e^*) < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{2}}} \quad (89)$$

L'obtention d'une excentricité limite repose donc sur notre capacité à relier ces constantes entre elles, puis les relier explicitement à l'excentricité.

Bien que nos travaux ne couvrent pas l'ensemble des constantes de l'article et qu'il n'est donc pas possible pour le moment d'explicitier cette excentricité limite, nous avons pu déterminer de nombreuses constantes

clés. Nous détaillons ci dessous les bornes que nous avons obtenu :

Relation 1 :

$$C_{22} = C_{22}(e^*) < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{2}}} \quad (90)$$

Relation 2 :

$$C_{22} = \max(C_{12}, C_{0,1,2}) \quad (91)$$

Où $C_{0,1,2}$ désigne le maximum des constantes obtenues en traitant à la main les cas $q = 0$, $q = 1$ et $q = 2$ dans la proposition 22.

Relation 3 :

$$C_{12} = (2\pi C_{11} \exp(\frac{C_{11}}{q^2}) + 1) \|F\| \quad (92)$$

$$\leq \left(2\pi C_{11} \exp(\frac{C_{11}}{4}) + 1\right) \left(1 + \frac{2C_R C_8 \omega_g}{2C_\Omega \rho^{1/3} q^2}\right) \quad (93)$$

$$\leq \left(2\pi C_{11} \exp(\frac{C_{11}}{4}) + 1\right) \left(1 + \frac{C_R C_8}{4C_\Omega \rho^{1/3}}\right) \quad (94)$$

Où ρ est le rayon de courbure, fonction explicite de l'excentricité.

Relation 4 :

$$C_{11} = 6C_8 + 3 \|X'''\|_\infty \quad (95)$$

Relation 5 :

$$C_8 \sim \left(\frac{C_\Omega}{3r^2}\right)^4 \|h\| + \|g\| \quad (96)$$

Relation 6 :

$$C_R = 4R^{1/3} C_\Omega \quad (97)$$

Où r et R sont les bornes du rayon de courbure, et peuvent donc aussi être exprimés en fonction de l'excentricité.

Où g et h sont les fonctions apparaissant dans le paramétrage de l'ellipse en coordonnées de Lazutkin.

De ceci, nous pouvons en déduire la relation entre C_{22} et C_Ω . Nous l'avons avec quelques majorations grossières, étant donné que nous voulons un résultat valable pour tout $q \geq 2$. Nous obtenons la majoration suivante de C_{22} :

$$\left(2\pi \left(6 \left(\left(\frac{C_\Omega}{3r^2}\right)^4 \|h\| + \|g\|\right) + 3 \|X'''\|_\infty\right) \exp\left(\frac{6 \left(\left(\frac{C_\Omega}{3r^2}\right)^4 \|h\| + \|g\|\right) + 3 \|X'''\|_\infty}{4}\right) + 1\right) \left(1 + \frac{4R^{1/3} C_\Omega \left(\left(\frac{C_\Omega}{3r^2}\right)^4 \|h\| + \|g\|\right)}{4C_\Omega \rho^{1/3}}\right)$$

Il nous reste ensuite à relier C_Ω au rayon de courbure (donc à l'excentricité) de l'ellipse. Ceci est donné par Lazutkin :

Relation 7 :

$$C_\Omega = \left[\int_0^1 \rho^{-2/3}\right]^{-1} \quad (98)$$

La condition recherchée apparaît donc enfin en mettant ensemble la **Relation 1** et la majoration précédente, en se servant de la **Relation 7** pour avoir une majoration, quoique grossière et difficile à calculer, de l'excentricité limite.

5.8 Annexe

5.8.1 Preuve du théorème 3 et lemmes associés

Lemme 8 L'orbite étant périodique avec q rebonds, on a l'existence d'un $k^* \in \mathbb{Z}$,

$$\|S_{k^*+1} - S_{k^*}\| \leq \frac{1}{q} \quad (99)$$

(tiroirs de Dirichlet) Or, en utilisant les coordonnées de Lazutkin, on a $S_{k^*+1} - S_{k^*} = a_1(s_{k^*}^*)\varphi_{k^*} + O(\varphi_{k^*}^2)$
D'où pour q suffisamment grand,

$$\varphi_{k^*} \leq \frac{1^+}{2q\rho(S_{k^*})} \quad (100)$$

Où la notation $^+$ désigne une multiplication par $(1 + \varepsilon)$, ε dépendant du rayon de courbure. D'où :

$$\sin(\varphi_{k^*}/2) \leq \frac{1^+}{4q\rho(S_{k^*})} y_{k^*} \leq \frac{C_\Omega^+}{r^{2/3}q} \quad (101)$$

Posons $C_1 := C_\Omega^+/r^2/3$

Toujours d'après les coordonnées de Lazutkin, $\forall k$, $y_{k+1} - y_k = y_k^4 h(x_k, y_k)$

Par récurrence, $\forall i$, $y_{k^*+i} \leq \frac{C_1}{q} + o\left(\frac{1}{q}\right)$ D'où $\forall k$,

$$y_k \leq \frac{C_1^+}{q} \quad (102)$$

On a alors,

$$|y_{k+1} - y_k| \leq \frac{C_1^{+4}}{q^4} \|h\| \quad (103)$$

Posons $C_0 = \left(C_1^4 \|h\|\right)^+$, et $C = C_0 + \|g\|$ (g étant la seconde fonction apparaissant dans les coordonnées de Lazutkin).

On a alors $\forall j, k$,

$$|y_j - y_k| \leq \frac{C_0}{q^3} \quad (104)$$

Montrons ensuite par l'absurde que $\forall k$, $|y_k - \frac{1}{q}| \leq \frac{C^+}{q^3}$, et supposons pour cela qu'il existe j tel que $|y_j - \frac{1}{q}| >$

$\frac{C^+}{q^3}$. Si $y_j - \frac{1}{q} > \frac{C^+}{q^3}$, alors $\forall k$,

$$y_k - \frac{1}{q} > y_j - \frac{1}{q} - \frac{C_0}{q^3} > \frac{C^+ - C_0}{q^3} \quad (105)$$

et comme $\forall k$, $x_{k+1} - x_k = y_k + y_k^3 g(x_k, y_k)$ (Lazutkin), on obtient par suite $\forall k$,

$$x_{k+1} - x_k > \frac{1}{q} + \frac{C^+ - C_0 + \|g\|}{q^3} + o\left(\frac{1}{q^3}\right) \quad (106)$$

Puis

$$x_q - x_0 > 1 + \frac{C^+ - C_0 + \|g\|}{q^2} + o\left(\frac{1}{q^2}\right) > 1 \quad (107)$$

Ce qui amène une contradiction, l'ellipse étant de périmètre 1 on a $x_q - x_0 = 1$.

Et si $y_j - \frac{1}{q} < -\frac{C^+}{q^3}$, $\forall k$,

$$y_k - \frac{1}{q} < y_j - \frac{1}{q} + \frac{C_0}{q^3} < \frac{C_0 - C^+}{q^3} \quad (108)$$

Soit $\forall k$,

$$x_{k+1} - x_k < \frac{1}{q} - \frac{C^+ - C_0 - \|g\|}{q^3} + o\left(\frac{1}{q^3}\right) \quad (109)$$

Et par suite,

$$x_q - x_0 < 1 - \frac{C^+ - C_0 - \|g\|}{q^2} + o\left(\frac{1}{q^2}\right) < 1 \quad (110)$$

Ce qui est également un contradiction.

On a donc $\forall k$,

$$|y_k - \frac{1}{q}| \leq \frac{C^+}{q^3} \quad (111)$$

Lemme 10 D'après le lemme 8, il existe une constante $C_8 > 0$, tel que $y \in [1/q - C_8/q^3, 1/q + C_8/q^3]$. Comme l'on travaille sur un domaine convexe, le rayon de courbure est borné, soient $r, R > 0$ tels que $\forall s$,

$$r \leq \rho(s) \leq R \quad (112)$$

Sachant que dans le paramétrage de Lazutkin, $y(s) = 4C_\Omega \rho^{1/3}(s) \sin(\varphi/2)$, posons :

$$\begin{cases} C_R = 4R^{1/3}C_\Omega \\ C_r = 4r^{1/3}C_\Omega \end{cases} \quad (113)$$

Et définissons de même les fonctions

$$\beta : x \mapsto \frac{1}{C_R}x - \frac{C_8}{C_R}x^3 = \frac{C}{C_R}x \left(\frac{1}{\sqrt{C_8}} - x \right) \left(\frac{1}{\sqrt{C_8}} + x \right) \quad (114)$$

et

$$\gamma : x \mapsto \frac{1}{C_r}x + \frac{C_8}{C_r}x^3 = \frac{C_8}{C_r}x \left(x^2 + \frac{1}{C_8} \right) \quad (115)$$

On obtient donc :

$$\beta\left(\frac{1}{q}\right) \leq \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \leq \gamma\left(\frac{1}{q}\right) \quad (116)$$

On supposera de plus que $q \geq \sqrt{C_8}$. En outre, pour q suffisamment grand, soit tel que $\frac{1}{C_r q} + \frac{C_8}{C_R q^3} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$,

on a par croissance de

$\alpha : x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ sur $[0, 1/\sqrt{2}]$:

$$\alpha \circ \beta\left(\frac{1}{q}\right) \leq \alpha \circ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin \varphi \leq \alpha \circ \gamma\left(\frac{1}{q}\right) \quad (117)$$

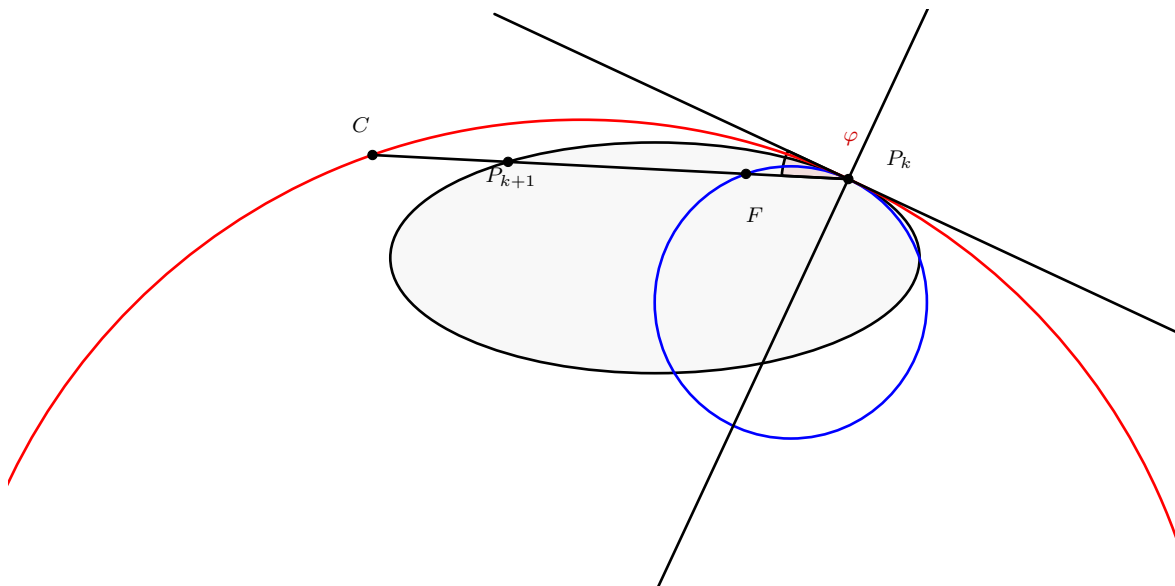


FIGURE 6

D'autre part, on obtient géométriquement l'inégalité suivante : (voir schéma ci-dessus)

$$\|F - P_k\| = 2r \sin \varphi \leq \|P_{k+1} - P_k\| \leq 2R \sin \varphi = \|C - P_k\| \quad (118)$$

Remarque :

Dans le cas du cercle bleu ou rouge, cas d'égalité dans l'inégalité donc c'est optimal!

On cherche d'une part à minorer $\alpha \circ \beta \left(\frac{1}{q} \right)$, et d'autre part à majorer $\alpha \circ \gamma \left(\frac{1}{q} \right)$.

La fonction α étant concave sur $[0, 1/\sqrt{2}]$, on a les inégalités de convexité suivantes pour $x \in [0, 1/\sqrt{2}]$:

$$\sqrt{(2)x} \leq \alpha(x) \leq 2x \quad (119)$$

Soit $2 \leq q_0 < q$.

β (respectivement γ) est concave (respectivement convexe) sur \mathbb{R}^+ . Pour $x \leq 1/q_0$,

$$\beta(x) \geq q_0 \beta \left(\frac{1}{q_0} \right) x \text{ et } \gamma(x) \leq q_0 \gamma \left(\frac{1}{q_0} \right) x \quad (120)$$

Soit, en injectant dans (117),

$$\frac{2\sqrt{2}r}{C_R} \left(1 - \frac{C_8}{q_0^2} \right) \frac{1}{q} \leq \|P_{k+1} - P_k\| \leq \frac{4R}{C_r} \left(1 + \frac{C_8}{q_0^2} \right) \frac{1}{q} \quad (121)$$

id est

$$\frac{r}{\sqrt{2}C_\Omega R^{1/3}} \left(1 - \frac{C_8}{q_0^2} \right) \frac{1}{q} \leq \|P_{k+1} - P_k\| \leq \frac{R}{C_\Omega r^{1/3}} \left(1 + \frac{C_8}{q_0^2} \right) \frac{1}{q} \quad (122)$$

Afin d'obtenir une inégalité de la forme

$$\frac{1}{qC_{10}} \leq \|P_{k+1} - P_k\| \leq \frac{C_{10}}{q} \quad (123)$$

On prend

$$C_{10} = \min \left(\frac{\sqrt{2}C_\Omega R^{1/3}}{r \left(1 - \frac{C_8}{q_0^2} \right)}, \frac{R \left(1 + \frac{C_8}{q_0^2} \right)}{C_\Omega r^{1/3}} \right) \quad (124)$$

Pour $q \geq q_0 \geq \sqrt{C_8}$, posons

$$A := \left(\frac{\sqrt{2}C_\Omega^2}{1 - \frac{C_8}{q_0^4}} \right)^{3/2} \quad (125)$$

Distinguons alors deux cas :

- Si $Rr \geq A$, on a :

$$C_{10} = \frac{\sqrt{2}C_\Omega R^{1/3}}{r \left(1 - \frac{C_8}{q_0^2} \right)} \quad (126)$$

- Si $Rr \leq A$, on a :

$$C_{10} = \frac{R \left(1 + \frac{C_8}{q_0^2} \right)}{C_\Omega r^{1/3}} \quad (127)$$

En particulier, pour q_0 grand, on s'attend à

$$C_{10} = \frac{\sqrt{2}C_\Omega R^{1/3}}{r} \text{ ou } C_{10} = \frac{\sqrt{R}}{C_\Omega r^{1/3}} \quad (128)$$

Remarque :

On aurait également pu écrire, en considérant q suffisamment grand, le développement limité suivant, ce qui donne un encadrement légèrement plus fin, mais qui reste en $1/q$:

$$\begin{cases} \alpha \left(\frac{1}{C_R q} - \frac{C_8}{C_R q^3} \right) = \frac{2}{C_R q} - \frac{2C_R^2 C + 1}{C_R^3 q^3} + O\left(\frac{1}{q^5}\right) \\ \alpha \left(\frac{1}{C_r q} + \frac{C_8}{C_r q^3} \right) = \frac{2}{C_r q} + \frac{2C_r^2 C + 1}{C_r^3 q^3} + O\left(\frac{1}{q^5}\right) \end{cases} \quad (129)$$

Qui pour q_0 suffisamment grand n'est pas loin de (121), on a une perte de 30% en précision sur la borne inférieure.

Lemme 4 Soit $0 \leq k < q$ Commençons par poser ξ_k l'angle entre les droites P'_k, P'_{k+1} et $(\bar{P}'_k, \bar{P}'_{k+1})$

On cherche à majorer ξ_k . On a la situation suivante :

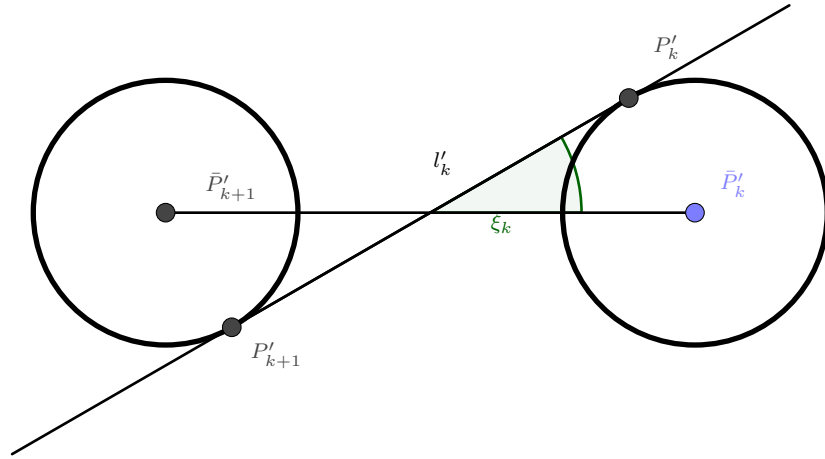


FIGURE 7

Le point P'_k se trouve dans le cercle de centre \bar{P}'_k et de rayon $\|\mathbf{n}\|_\infty$, idem pour P'_{k+1} . Afin de maximiser l'angle (dans le pire des cas), il faut les prendre tangents à ces cercles, comme indiqué sur le schéma.

Vient alors en utilisant le corollaire 10 la majoration suivante :

$$|\xi_k| \leq |\tan \xi_k| = 2 \frac{\|\mathbf{n}\|_\infty}{l'_k} \leq 2 \|\mathbf{n}\|_\infty q C_{10} \quad (130)$$

On remarque que cette majoration ne dépend pas de l'indice k . On peut alors relier aisément les angles $\bar{\varphi}_k^+$ et $\bar{\varphi}_k^-$ aux angles ξ_k et ξ_{k-1} .

En effet on a la situation suivante :

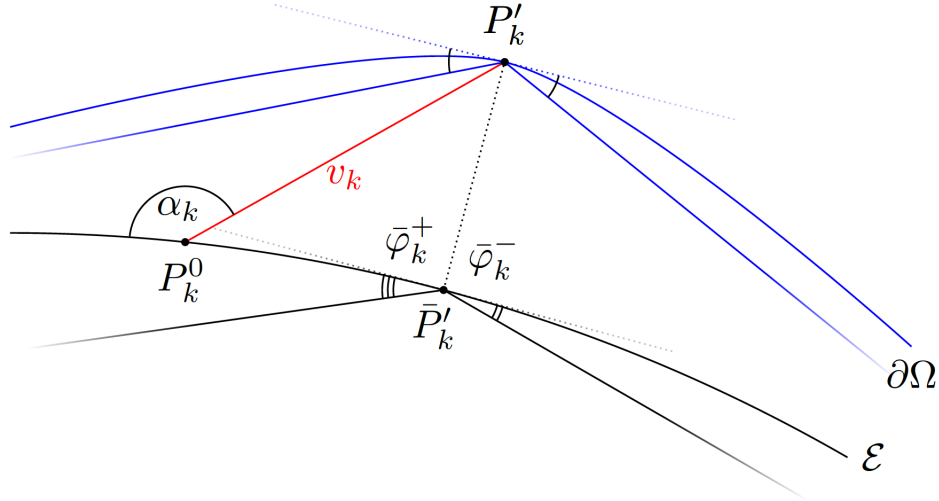


FIGURE 8

Où les tangentes aux points P'_k et \bar{P}'_k sont écartées d'un angle ν_k (angle contrôlé par la dérivée de la normale au point P_k)

Il vient alors les relations suivantes :

$$\xi_k = \bar{\varphi}_k^+ - \alpha + \nu_k \xi_{k-1} = \alpha - \bar{\varphi}_k^- + \nu_k \tag{131}$$

D'où

$$|\xi_k + \xi_{k-1}| = |\bar{\varphi}_k^+ - \bar{\varphi}_k^- + 2\nu_k| \leq 4 \|\mathbf{n}\|_\infty q C_{10} \tag{132}$$

Puis par inégalité triangulaire,

$$|\bar{\varphi}_k^+ - \bar{\varphi}_k^-| \leq 4C_{10}q \|\mathbf{n}\|_\infty + \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1} \leq 5C_{10}q \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1} \tag{133}$$

Comme $\|\mathbf{n}\|_\infty \leq \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1}$, $C_{10} > 1$ et $q \geq 2$ (donc $2 \leq C_{10}q$).

Lemme 5 N'ayant pas une maîtrise suffisante des intégrales premières, on admettra une partie de la preuve (notamment l'expression de l'intégrale première) et ne chercherons pas à gagner en précision sur la majoration obtenue dans l'article.

L'idée de la preuve est de considérer le pire cas possible en ce qui concerne les déviations des angles de réflexions $\bar{\phi}_k^\pm$ de ϕ_k

Les angles de réflexion dépendants (sauf dans le cas trivial d'un cercle), du point considéré, il est plus pertinent de s'intéresser à une intégrale première, sa valeur étant constante le long de toute orbite de l'ellipse \mathcal{E}_e . On peut donc supposer raisonnablement que sa valeur n'est pas trop changée du fait de la perturbation. C'est donc ce que font Avila, Kaloshin et DeSimoi.

Une intégrale première $I(\theta, \varphi)$ sur une ellipse s'exprime explicitement en fonction des coordonnées θ (paramétrisation action-angle) de nombre de rotation $1/q$:

$$I(\psi, \varphi) = \cos^2(\varphi) + \cos^2 \psi e^2 \sin^2 \varphi \tag{134}$$

Grâce à cette expression donnée par Avila, deSimoi et Kaloshin, on peut aisément calculer l'expression de la dérivée partielle de I par rapport à sa deuxième variable, ce qui nous permet les majorations sous le signe intégral dans la suite de cette preuve :

$$\partial_\varphi I(\psi, \phi) = (e^2 \cos^2 \psi - 1) \sin(2\varphi) \tag{135}$$

k_* étant indépendant de θ ; on peut changer le point de départ (correspondant à $\bar{\theta}_0$) par $\bar{\theta}_{nk_*}$.

On conclut ainsi que

$$|I_{k_*}^+ - I_*| < C_8 \|n\|_{C^1} \quad (136)$$

implique aussi

$$|I_{(n+1)k_*}^+ - I_{nk_*}^+| < C_8 \|n\|_{C^1} \quad (137)$$

pour tout n (ou les indices de I^+ sont pris modulo q) ; comme, $0 = qk_*$ modulo q , on a :

$$|I_0^+ - I_*| < |I_{k_*}^+ - I_*| + \sum_{n=1}^{q-1} |I_{(n+1)k_*}^+ - I_{nk_*}^+| < Cq \|n\|_{C^1} \quad (138)$$

finalement, un argument similaire traite le cas de $|I_0^- - I_*|$ (car $I_k^+ = I_{k+1}^-$ et, donc, il suffit de remplacer k_* par $k_* - 1$ dans l'argument ci-dessus)

Ensuite, la différence

$$Z := v_k(\theta) \sin \alpha_k(\theta) - n(S_q(\theta + k/q))$$

peut-être vue de la façon suivante : on considère la droite normale N en P_k à l'ellipse et la droite D passant par P'_k et parallèle à la tangente en P_k à l'ellipse.

Par définition, le segment I inclus dans N entre P_k et l'intersection Q_k de N et D est de taille

$$v_k(\theta) \sin \alpha_k(\theta)$$

tandis que le segment J inclus dans N entre P_k et l'intersection entre N et $\partial\Omega$ est de taille

$$n(S_q(\theta + k/q))$$

Ainsi, Z est la taille de la différence entre I et J .

En particulier, on peut estimer Z via le produit de la distance entre Q_k et P'_k et le sinus de l'angle entre D et la tangente à $\partial\Omega$ en P'_k .

- La distance entre Q_k et P'_k est bornée par $v_k(\theta)$ et, donc, par $C_8 q^3 \|n\|_{C^1}$ d'après ce qui précède
- Le sinus est borné par l'angle entre D et la tangente à l'ellipse en \bar{P}'_k [donc par la distance entre P_k et $\bar{P}'_k \leq v_k \leq C_8 q^3 \|n\|_{C^1}$] plus l'angle entre la tangente à l'ellipse en \bar{P}'_k et la tangente à $\partial\Omega$ en P'_k [lequel est au plus $|n'| \leq \|n\|_{C^1}$, d'après le lemme 4.

En définitive, on obtient,

$$|Z| = \text{distance} \times \text{sinus} \leq (C_8 q^3 \|n\|_{C^1}) \cdot (C_8 q^3 \|n\|_{C^1}) \quad (139)$$

On peut déduire la suite en remarquant que si

$$a = \Phi_q(\bar{\theta}_{k_*}) \text{ et } b = \bar{\varphi}_{k_*}^+,$$

alors

$$|b| \leq |b - a| + |a| < 5q^{-7} + C(e)/q \leq C'/q$$

et, donc,

$$|I_{k_*}^+ - I_*| \leq \int_a^b |\partial_\varphi I(\bar{\theta}_{k_*}, \varphi)| d\varphi \leq |b - a| 2|b| \leq 5C_{10} q \|n\|_{C^1} 2C'/q = C \|n\|_{C^1} \quad (140)$$

(car $|\partial_\varphi I| \leq 2\varphi e t |b - a| \leq 5C_{10}q \|n\|_{C^1}$).

Pour la suite, en sachant que $|I_0^\pm - I_*| < Cq \|n\|_{C^1}$, on écrit

$$|I_0^\pm - I_*| = |\partial_\varphi I(x)| |\bar{\varphi}_0^\pm(\theta) - \varphi_0(\theta)| \quad (141)$$

(ou x est un point intermédiaire) et on utilise la borne $|\partial_\varphi I(x)| \geq c|x| \geq cc(e)/q$ donnée par le corollaire 9 pour obtenir

$$|\bar{\varphi}_0^\pm(\theta) - \varphi_0(\theta)| \leq Cq \|n\|_{C^1} q / (cc(e)) = C'' q^2 \|n\|_{C^1} \quad (142)$$

De plus, la dernière inégalité est similaire : en partant de la formule pour l'intégrale première I et les faits que

$$\begin{cases} |\bar{\varphi}_k^+ - \bar{\varphi}_k^-| < Cq \|n\|_{C^1} & \text{(grâce au lemme 4)} \\ |\varphi_k - 1/q| \leq C(e)/q^3, \end{cases}$$

On déduit ensuite, en utilisant que les θ sont reliés aux ψ dans l'expression de I que :

$$|\bar{\theta}_k - \theta_k| \leq Cq^3 \|n\|_{C^1} \quad (143)$$

Lemme 6 Pour commencer, plaçons-nous dans le triangle $P_{k+1}^0 P'_{k+1} P'_k$. On pose pour simplifier la distance $p_k = \left\| P'_k - P_{k+1}^0 \right\|$ (On ne fait pas apparaître les θ ici afin d'alléger les notations). Le théorème d'Al-Kashi nous permet d'écrire :

$$p_k^2 = v_k^2 + (l_k^0)^2 - 2v_k l_k^0 \cos(\varphi_k + \alpha_k) \quad (144)$$

De même, si l'on applique ce théorème dans le triangle $P_{k+1}^0 P'_{k+1} P'_k$, on a :

$$(l'_k)^2 = v_{k+1}^2 + p_k^2 + 2v_{k+1} p_k \cos(\varphi_{k+1} - \alpha_{k+1} - \delta_{k+1}) \quad (145)$$

La fin de la preuve étant très technique et ne donnant pas d'amélioration en ce qui concerne le paramètre e , nous avons décidé d'admettre les résultats des auteurs.

Théorème 3 Rappelons dans un premier temps que

$$\mathcal{D} \left(\mathbf{n}, S, \phi, \frac{1}{q} \right) (\theta) = 2 \sum_{k=0}^{q-1} \mathbf{n} \left(S_q \left(\theta + \frac{k}{q} \right) \right) \sin \varphi_k(\theta) = 2 \sum_{k=0}^{q-1} \mathbf{n} \left(P_k^0 \right) \sin \varphi_k(\theta) \quad (146)$$

Montrons ensuite que

$$\mathbf{n} \left(P_k^0 \right) = v_k(\theta) \sin \alpha_k(\theta) + O(q^6 \|n\|_{C^1}^2) \quad (147)$$

$v_k(\theta) \sin \alpha_k(\theta) - \mathbf{n}(P_k^0) = v_k(\theta) \sin \alpha_k(\theta) - \mathbf{n}(\bar{P}'_k) + \mathbf{n}(\bar{P}'_k) - \mathbf{n}(P_k^0)$, et on peut voir d'après la figure 4 (cf lemme 4) que la distance $v_k(\theta) \sin \alpha_k(\theta) - \mathbf{n}(\bar{P}'_k)$ correspond à la taille du segment entre le point \bar{P}'_k et la tangente à \mathcal{E} en P_k^0 . La formule de Taylor-Young nous donne alors que la longueur de ce segment est en $O(|P_k^0 - \bar{P}'_k|^2)$.

On peut ensuite appliquer le lemme 5, qui nous donne que

$$O(|\bar{\theta}_k - \theta_k|^2) = O(q^6 \|n\|_{C^1}^2) \quad (148)$$

Il reste le terme $\mathbf{n}(\bar{P}'_k) - \mathbf{n}(P_k^0)$, qu'on peut majorer en appliquant à nouveau le lemme 5 par

$$\|\mathbf{n}\|_{\mathcal{E}^1} \left| P_k^0 - \bar{P}'_k \right| \leq \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{E}^1}^2 C_5 q^3 \leq C_5 q^6 \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{E}^1}^2 \quad (149)$$

On a donc

$$\mathcal{D}\left(\mathbf{n}, S, \phi, \frac{1}{q}\right)(\theta) + O(q^5 \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1}^2) = 2 \sum_{k=0}^{q-1} v_k \sin \alpha_k \sin \varphi_k(\theta) = \sum_{k=0}^{q-1} v_k (\cos(\varphi_k - \alpha_k) - \cos(\varphi_k + \alpha_k)) = (\star) \quad (150)$$

Un télescopage nous donne :

$$(\star) = \sum_{k=0}^{q-1} v_{k+1} \cos(\varphi_{k+1} - \alpha_{k+1}) - v_k \cos(\varphi_k + \alpha_k) \quad (151)$$

Ensuite, par définition $L_q^0(\theta) = \sum_{k=0}^{q-1} l_k^0(\theta)$ et $L'_q(\theta) = \sum_{k=0}^{q-1} l'_k(\theta)$.

On peut donc appliquer le lemme 6 (eq. (42)), puis le lemme 5 (eq. (37)) à la dernière ligne pour conclure que

$$\begin{aligned} \left| L'_q - L_q^0 + \sum_{k=0}^{q-1} v_{k+1} \cos(\varphi_{k+1} - \alpha_{k+1}) - v_k \cos(\varphi_k + \alpha_k) \right| &\leq \sum_{k=0}^{q-1} \left| l'_k - l_k^0 - v_k \cos(\varphi_k - \alpha_k) + v_{k+1} \cos(\varphi_{k+1} - \alpha_{k+1}) \right| \\ &\leq 10 \sum_{k=0}^{q-1} \frac{v_k^2 + v_{k+1}^2}{l_k^0} \\ &\leq 20 \sum_{k=0}^{q-1} \frac{v_k^2}{l_k^0} \\ &\leq 20 C_5 q^8 \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1}^2 \\ &\leq C_3 q^8 \|\mathbf{n}\|_{\mathcal{C}^1}^2 \end{aligned}$$

Le majorant étant indépendant de θ , ceci achève la preuve du théorème 3.

5.8.2 Preuve des lemmes conduisant au résultat

Lemme 11 On cherche une majoration en norme \mathcal{C}^1 de l'abscisse en coordonnées de Lazutkin. L'idée de la preuve est donc de contrôler la dérivée de celle-ci de façon globale. Pour cela, nous allons nous servir de théorèmes classiques d'analyse, notamment le théorème des accroissements finis.

Rappelons d'abord la notation $X_q(\theta)$ qui provient des coordonnées de Lazutkin (voir section idoine) :

$$(X_q, Y_q) = \Psi_L(S_q, \phi_q)$$

$\forall k < q$, $(X_q(\theta_k = \theta + k/q), Y_q(\theta_k))$ repère le k -ème point de rebond sur la table de billard.

Prenons deux points consécutifs $(X_q(\theta_k), Y_q(\theta_k))$ et $(X_q(\theta_{k+1}), Y_q(\theta_{k+1}))$, et f_L la paramétrisation de la table de billard, donnée en section 1.2.

Le système de coordonnées adapté de Lazutkin nous permet d'obtenir les relations suivantes :

- Par définition d'une trajectoire de billard, l'application f_L au point $(X_q(\theta_k), Y_q(\theta_k))$ nous amène au point suivant :

$$f_L(X_q(\theta_k), Y_q(\theta_k)) = X_q(\theta_{k+1}) \quad (152)$$

- L'équation de la table de billard nous donne d'autre part :

$$X_q(\theta_{k+1}) = X_q(\theta_k) + Y_q(\theta_k)(1 + Y^2(\theta_k)g(X_q, Y_q)) \quad (153)$$

Cette dernière relation nous permet d'estimer l'accroissement de X_q entre les points k et $k + 1$, en utilisant le Lemme 8 démontré auparavant :

On a constante C_8 , telle que

$$|Y_q(\theta_k) - 1/q| < \frac{C_8}{q^3} \quad (154)$$

D'où comme $\theta_{k+1} - \theta_k = 1/q$, et $X_q(\theta_{k+1}) - X_q(\theta_k) = Y_q^2 + o(1/q^3)$, on peut écrire :

$$|q(X_q(\theta_{k+1}) - X_q(\theta_k)) - 1| < \frac{C_8}{q^2} \quad (155)$$

On peut alors appliquer une première fois le théorème des accroissements finis : il existe $\bar{\theta}_k \in]\theta_k, \theta_{k+1}[$, tel que

$$|X'_q(\bar{\theta}_k) - 1| < C_8/q^2 \quad (156)$$

En appliquant le même raisonnement dans l'intervalle $]\theta_{k+2}, \theta_{k+3}[$, on obtient $\bar{\theta}_{k+2}$ tel que

$$1/q < \bar{\theta}_{k+2} - \bar{\theta}_k < 3/q \quad (157)$$

Puis

$$|X'_q(\bar{\theta}_{k+2}) - X'_q(\bar{\theta}_k)| < 2\frac{C_8}{q^2} \quad (158)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{X'_q(\bar{\theta}_{k+2}) - X'_q(\bar{\theta}_k)}{\bar{\theta}_{k+2} - \bar{\theta}_k} \right| < 2\frac{C_8}{q} \quad (159)$$

$$(160)$$

Et en ré-applicant le théorème des accroissements finis, il existe $\bar{\bar{\theta}}_k \in]\bar{\theta}_k, \bar{\theta}_{k+2}[$ tel que

$$|X''(\bar{\bar{\theta}}_k)| < 2\frac{C_8}{q} \quad (161)$$

Ainsi, pour tout $\theta \in [\bar{\theta}_k, \bar{\theta}_{k+2}]$, la fonction X_q étant analytique (on a $X_q(\theta) = S(\theta, 1/q)$ où S est analytique en chacun de ses arguments), elle est de classe \mathcal{C}^∞ et on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral, d'où le développement suivant :

$$X'_q(\theta) = X'_q(\bar{\theta}_k) + (\theta - \bar{\theta}_k)X''_q(\bar{\theta}_k) + \int_{\bar{\theta}_k}^{\theta} \int_{\bar{\theta}_k}^{\theta'} X'''_q(\theta'')d\theta''d\theta' \quad (162)$$

$$= X'_q(\bar{\theta}_k) + \int_{\bar{\theta}_k}^{\theta} \left(X''_q(\bar{\theta}_k) + \int_{\bar{\theta}_k}^{\theta'} X'''_q(\theta'')d\theta''d\theta' \right) \quad (163)$$

Ensuite, en appliquant une intégrale de Cauchy, on peut montrer l'existence d'une constante $C_{\text{dérivée tierce}}$ tendant vers 0 avec e , et par laquelle la norme de X'''_q est majorée. En effet, lorsque l'excentricité est nulle, \mathcal{E} est un cercle et la fonction X_q est simplement l'identité, dont la dérivée troisième est nulle.

L'égalité précédente couplée à nos majorations nous permet donc d'écrire ensuite que pour tout $\theta \in [\bar{\theta}_k, \bar{\theta}_{k+2}]$,

$$|X'_q(\theta) - X'_q(\bar{\theta}_k)| < \frac{3}{q} * \frac{2C_8}{q} + \frac{3}{q}C_{\text{dérivée tierce}} \quad (164)$$

$$< \frac{C_{11}}{q^2} \quad (165)$$

Où C_{11} tends vers 0 avec e .

D'où

$$\left\| X'_q - 1 \right\|_{\mathcal{E}^0} < \frac{C_{11}}{q^2} \quad (166)$$

Puis en intégrant cette relation par rapport à θ , on obtient le résultat en norme \mathcal{E}^1 attendu.

Lemme 12 D'après le lemme 11, on a

$$\|X_q - Id\|_{\mathcal{E}^1} \leq \frac{C_{11}}{q^2} \quad (167)$$

On peut donc écrire $X_q = 1 + \tilde{X}_q$, où $\left\| \tilde{X}_q \right\| \leq \frac{C_{11}}{q^2}$.

X_q étant proche de l'identité, on peut donner une bonne approximation de son inverse :

$$X_q^{-1} = 1 - \tilde{X}_q + \tilde{X}_q^2 - \dots \quad (168)$$

D'où

$$\|X_q^{-1} - Id\| \leq \frac{C_{11}}{q^2} \exp \frac{C_{11}}{q^2} \simeq \frac{C_{11}}{q^2} \quad (169)$$

Ensuite, $\forall x$,

$$|\sin(2\pi q X_q^{-1}(x)) - \sin(2\pi q x)| = 2 \cos(\pi q (X_q^{-1}(x) + x)) \sin(\pi q (X_q^{-1}(x) - x)) \quad (170)$$

$$\leq 2 \|X_q^{-1} - Id\| \pi q \quad (171)$$

$$\leq 2\pi \frac{C_{11}}{q} \exp \frac{C_{11}}{q^2} \quad (172)$$

En utilisant ce qui précède.

Posons pour simplifier $F(x) := \frac{q\eta_q}{\omega_q \mu} \frac{1}{X'_q(X_q^{-1}(x))}$.

In fine, avec la définition de $c_q(x)$ et $s_q(x)$, on peut écrire :

$$\|s_q(x) - \sin(2\pi q x)\| = \|F(x) \sin(2\pi q X_q^{-1}(x)) - \sin(2\pi q x)\| \quad (173)$$

$$\leq \|F(x)(\sin(2\pi q X_q^{-1}(x)) - \sin(2\pi q x))\| + \|(F(x) - 1) \sin(2\pi q x)\| \quad (174)$$

$$\leq \|F(x)\| 2\pi \frac{C_{11}}{q} \exp \frac{C_{11}}{q^2} + \|F(x) - 1\| \quad (175)$$

$$\leq \frac{C_{12}}{q^2} \quad (176)$$

On procède de même avec le cosinus, ce qui conclut la preuve du lemme 12.

6 Étude de l'article de Hezari-Zelditch

6.1 Présentation du travail et du bilan effectués

Dans un premier temps, nous avons traité la partie 2 de l'article de Hezari-Zelditch qui consiste à montrer que l'isospectralité avec une ellipse proche du cercle impose des contraintes sur la courbure de l'ouvert Ω considéré, ce qui entraîne que si Ω est proche de l'ellipse alors il doit être aussi proche du cercle.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressé à l'étude de l'application de billard qui possède des propriétés de périodicité particulières lorsque Ω est proche du cercle.

Enfin, nous nous sommes concentré en particulier sur la détermination des constantes dans le lemme 3.11 de l'article, lemme qui nous a demandé une attention particulière.

Finalement, nous avons déterminé quasiment toutes les constantes des parties 2 à 4 de l'article. Les dernières parties font l'objet de l'application des proposition précédentes et de mise en commun afin de résoudre le problème initial. A l'aide des constantes calculées, nous avons donc pu déterminer un ordre de grandeur de l'excentricité en dessous de laquelle l'ellipse est spectralement rigide.

6.2 L'isospectralité avec une ellipse proche du cercle.

Dans cette partie de **One can hear the shape of ellipses of small eccentricity** de Hezari et Zelditch, les auteurs se penchent sur la question des invariants spectraux pour montrer qu'un domaine isospectral à une ellipse est nécessairement proche de cette ellipse. Introduisons d'abord quelques notations.

Soit E_ε une ellipse d'excentricité ε . On peut supposer sans pertes de généralités que :

$$E_\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} \leq 1 \right\}$$

On se donne Ω un domaine lisse isospectral à E_ε pour le Laplacien euclidien avec des conditions limites de Dirichlet ou de Neumann.

Les calculs que nous avons menés lors de l'étude de l'article de Kac permettent d'affirmer sans réserve que Ω et E_ε ont même périmètre. Notons le l_ε .

On notera s la paramétrisation en longueur d'arc. On dénotera enfin $\kappa(\Omega)(s)$ et $\kappa(E_\varepsilon)(s)$ les fonctions de courbures respectives de $\partial\Omega$ et ∂E_ε appartenant à $C^\infty[0, l_\varepsilon]$. Nous noterons $_n$ la dérivée n -ième de la fonction de courbure en fonction du paramètre de longueur d'arc pour un domaine quelconque. Nous considérerons également les normes C^n définies comme la somme des maximums des dérivées jusqu'à n de la fonction de courbure sur le bord du domaine considéré. Cette partie concentrera son étude autour de la proposition suivante, en particulier sur l'estimations des constantes non calculées dans la démonstration :

PROPOSITION : 2.1

Supposons que Ω et E_ε sont isospectraux. Alors pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\|\kappa(\Omega) - 1\|_{C^n[0, l_\varepsilon]} = \mathcal{O}_n(\varepsilon)$$

Cette écriture est équivalente à dire que pour tout $n \geq 0$, il existe $A_n \geq 0$ tel que :

$$\|\kappa(\Omega) - 1\|_{C^n[0, l_\varepsilon]} \leq A_n \varepsilon$$

En particulier, pour ε suffisamment petit, Ω est strictement convexe.

L'objet de notre étude sera, en particulier, de déterminer les A_n pour un ε suffisamment petit. Nous étudierons également le corollaire obtenu par Hezari et Zelditch :

PROPOSITION : 2.2

Supposons que Ω et E_ε sont isospectraux. Alors, on peut appliquer une perturbation rigide à Ω de sorte que :

$$\partial\Omega = \partial E_0 + f N_0$$

avec $\|f\|_{C^n(\partial D)} = O_n(\varepsilon)$ pour tout $n \geq 0$. On a noté N_0 le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur du disque unité $D = E_0$. Selon les définitions établies dans le papier, Ω est ε -quasi-circulaire dans C^n .

Commençons par donner le fonctionnement de la preuve de la proposition énoncée ci-dessus.

Soit Δ_Ω le Laplacien positif avec conditions de Dirichlet ou Neumann au bord de Ω . La formule des traces asymptotique pour l'équation de la chaleur donne :

$$Tr(e^{-t\Delta_\Omega}) \sim t^{-1} \sum_{n \geq 0} a_n t^n + b_n t^{n+\frac{1}{2}}, t \rightarrow 0^+$$

A l'aide du papier de Melrose, Zelditch et Hezari exploitent les invariants de la trace, en particulier les b_n pour obtenir les estimations voulues. Sans nous étendre sur cette problématique là, nous allons introduire certains calculs sur les ellipses qui nous seront utiles pour la suite de la preuve.

6.2.1 Sur le périmètre d'une ellipse.

Nous remarquons d'abord que la preuve de la proposition fait intervenir quelques considérations sur la taille du périmètre et de la norme de la fonction de courbure.

En particulier, nous allons préciser quantitativement l'affirmation :

$$l_\varepsilon = 2\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{177}$$

Soulignons ici qu'au contraire de la partie sur l'article d'Avila-Kaloshin-De Simoi, nous avons paramétré le périmètre du cercle comme étant égal à 2π . En paramétrant le contour de E_ε par pour les coordonnées positives :

$$\gamma(t) = (\cos t, \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin t)$$

on obtient de façon élémentaire que :

$$l_\varepsilon = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(t)} dt$$

Nous allons voir qu'il est possible de quantifier très précisément l'estimation (177) en obtenant un développement en série entière du périmètre.

En effet, le développement en série entière de la racine carrée au voisinage de 0 donne :

$$l_\varepsilon = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (-\varepsilon^2 \sin^2(t))^n dt$$

Comme on intègre sur un compact, on peut permuter les sommes :

$$l_\varepsilon = 4 \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (-1)^n \varepsilon^{2n} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) dt}_{\text{Intégrale de Wallis}}$$

Explicitons la valeur des termes apparaissant dans la somme :

$$\begin{aligned}
 \binom{1/2}{n} &= \frac{\frac{1}{2} \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \\
 &= \frac{1}{2^n} \frac{1(1-2)\dots(1-2n+2)}{n!} \\
 &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{1.3\dots(2n-3)}{n!} \\
 &= (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{2n-1}
 \end{aligned}$$

et

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t) dt = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

Ainsi :

$$2\pi - l_\varepsilon = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right]^2 \frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1} \quad (178)$$

Le développement (178) permet de contrôler la taille de l'écart entre le périmètre l_ε et 2π . Pour $\varepsilon \leq \frac{1}{100}$, on obtient :

$$0 \leq 2\pi - l_\varepsilon \leq 0.26\varepsilon$$

6.2.2 Sur la fonction de courbure d'une ellipse

Maintenant que nous contrôlons la taille du périmètre, penchons nous sur l'étude de la fonction de courbure. On utilise la même paramétrisation que ci-dessus pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, elle décrit $\partial E_\varepsilon \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$. Le paramètre de longueur d'arc correspondant $s(t) \in [0, l_\varepsilon/4]$ est la longueur de l'arc $\{\gamma(u) : 0 \leq u \leq t\}$ qui est :

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(u)| du = \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(u)} du$$

La fonction de courbure de E_ε s'écrit donc en $\gamma(t)$:

$$\kappa(E_\varepsilon)(s(t)) = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

Pour appliquer Avila-Kaloshin-De Simoi nous avons besoin de contrôler les 39 premières dérivées de $\kappa(E_\varepsilon)$. Bien que cela ne soit pas utile dans cette preuve, nous allons néanmoins procéder à ce calcul ici. Contrôlons d'abord la courbure $\kappa(E_\varepsilon)$, on a clairement :

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2} \leq \kappa(E_\varepsilon) \leq \frac{1}{1 - \varepsilon^2}$$

Dérivons une première fois $\kappa(E_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \kappa_1(E_\varepsilon)(s(t)) &= \frac{d\kappa(E_\varepsilon)}{ds}(s(t)) \\ &= \frac{d\kappa(E_\varepsilon)}{dt} \frac{dt}{ds} \\ &= -\frac{3\sqrt{1 - \varepsilon^2}\varepsilon^2 \cos t \sin t}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2(t))} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(t)}} \\ &= -\frac{3\sqrt{1 - \varepsilon^2}\varepsilon^2 \cos t \sin t}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2(t))^3} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|\kappa_1\|_{C^0} \leq \frac{3}{2} \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}$$

On remarque que l'expression de $\kappa(E_\varepsilon)$ a une forme particulière qui va nous permettre d'obtenir les bornes sur les 39 premières dérivées informatiquement.

$$\kappa(E_\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon^2} f(t)^3$$

avec $\frac{dt}{ds} = f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(t)}}$

On a avec la formule de récurrence,

$$\kappa_{n+1}(E_\varepsilon) = \frac{d\kappa_n(E_\varepsilon)}{dt} \frac{dt}{ds}$$

une méthode pour calculer successivement les dérivées de la fonction de courbure de E_ε .

Voici ci-après le code utilisé en SageMath pour calculer les bornes sur la norme C^0 des $\kappa_n(E_\varepsilon)$ pour n entre 0 et 39.

```
t= var('t')
eps = 10**(-4)
f = function('f')
g(t) = ( (1-eps^2)*(1/2)/eps^2 ) * f(t)**3
a(t) = (1-eps^2 * cos(t)^2)**(-1/2) # f = a
args = []
for n in [0..40]:
    args = args + [diff(f(t), t, n) == find_local_maximum(abs(a), 0, pi/2)[0]]
    a(t) = diff(a(t), t)
for n in [1..40]:
    print('n_□=□', n)
    g(t) = diff(g, t) * f(t) #g est un polynome en n variables
    #f, f', ..., f^(n) a coefficients positifs.
    g = g.expand()
    h = g.subs(args)
    print(h)
    print('\n')
```

En faisant tourner le programme, on obtient les bornes ci-après pour une excentricité ε plus petit que 10^{-4} . Les constantes trouvées correspondent aux A_n obtenus après division par ε^2 .

```
n = 1
t |--> 0.750000009375
```

```
n = 2
t |--> 1.500000026249937
```

```
n = 3
t |--> 3.000000142500025
```

```
n = 4
t |--> 6.000000359999982
```

```
n = 5
t |--> 12.000002070000134
```

```
n = 6
t |--> 24.000005160000207
```

```
n = 7
```

t \mapsto 48.00003156000685

n = 8

t \mapsto 96.00007872001

n = 9

t \mapsto 192.00049584039112

n = 10

t \mapsto 384.0012384003501

n = 11

t \mapsto 768.0078854637678

n = 12

t \mapsto 1536.0197068921582

n = 13

t \mapsto 3072.125930445439

n = 14

t \mapsto 6144.314788267903

n = 15

t \mapsto 12290.013820700571

n = 16

t \mapsto 24581.03416305358

n = 17

t \mapsto 49184.22032305173

n = 18

t \mapsto 98384.53560461244

n = 19

t \mapsto 197123.78688870414

n = 20
t |--> 394504.52937445807

n = 21
t |--> 794702.7490402252

n = 22
t |--> 1593480.6313818065

n = 23
t |--> 3279226.00545682

n = 24
t |--> 6621335.124854283

n = 25
t |--> 14791772.514879882

n = 26
t |--> 30444391.71910848

n = 27
t |--> 89248266.2534068

n = 28
t |--> 210788396.78135875

n = 29
t |--> 896239221.772095

n = 30
t |--> 2998131013.1064086

n = 31
t |--> 12477424669.911728

n = 32
t \mapsto 47614618811.85109

n = 33
t \mapsto 192773199762.19232

n = 34
t \mapsto 762225853161.4421

n = 35
t \mapsto 3062820766048.134

n = 36
t \mapsto 12228346287222.275

n = 37
t \mapsto 49152930606261.57

n = 38
t \mapsto 197150421942673.84

n = 39
t \mapsto 792445488668468.1

n = 40
t \mapsto 3221935876921641.0

6.2.3 Preuve de la Proposition

Maintenant que nous avons éclairé ces quelques éléments, lançons nous dans le preuve de la proposition à proprement parler. Comme nous l'avons précisé en introduction, elle fait intervenir des invariants spectraux dans la formule des traces asymptotique pour l'équation de la chaleur. Melrose a prouvé en particulier que :

$$b_{n+1} = c_n \int_0^l \kappa_n^2 ds + \int_0^l q_n(\kappa, \dots, \kappa_{n-1}) ds \quad (179)$$

avec $q_n(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{\underline{\beta}=(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})} d_{\underline{\beta}}^{(n)} x^{\underline{\beta}}$ un polynôme universel dont le multi-indice a pour poids : $W(\underline{\beta}) =$

$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\beta_k = 2n+2$ Nous reviendrons sur l'utilité de ces invariants plus tard, avançons dans la preuve.

On remarque avec les calculs menés précédemment que l'on peut montrer que :

$$\|\kappa(\Omega) - \kappa(E_\varepsilon)\|_{C^n} = \mathcal{O}_n(\varepsilon), \forall n \geq 0$$

car $\kappa(E_\varepsilon) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $\forall n \geq 1, \kappa_n(E_\varepsilon) = \mathcal{O}_n(\varepsilon)$.

Cela revient à montrer que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$:

$$\|\kappa_i(\Omega) - \kappa_i(E_\varepsilon)\|_\infty = \mathcal{O}_n(\varepsilon) \quad (180)$$

Or d'après le théorème de plongement de Sobolev :

$$\|\kappa_i(\Omega) - \kappa_i(E_\varepsilon)\|_\infty \leq \pi \|\kappa_i(\Omega) - \kappa_i(E_\varepsilon)\|_{\mathbf{H}^1}, \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

Le problème se réduit alors au contrôle de la norme \mathbf{H}^1 . Soit $i \in \{0, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \|\kappa_i(\Omega) - \kappa_i(E_\varepsilon)\|_{\mathbf{H}^1} &= \left[\|\kappa_i(\Omega) - \kappa_i(E_\varepsilon)\|_2^2 + \|\kappa_{i+1}(\Omega) - \kappa_{i+1}(E_\varepsilon)\|_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\kappa_i(\Omega) - \kappa_i(E_\varepsilon)\|_2 + \|\kappa_{i+1}(\Omega) - \kappa_{i+1}(E_\varepsilon)\|_2 \end{aligned}$$

Or $\forall n \geq 0$:

$$\|\kappa_n(\Omega) - \kappa_n(E_\varepsilon)\|_2 \leq \|\kappa_n(\Omega)\|_2 + \|\kappa_n(E_\varepsilon)\|_2 \leq \|\kappa_n(\Omega)\|_2 + \mathcal{O}_n(\varepsilon)$$

Il suffit donc de montrer pour obtenir (180) que :

$$\|\kappa(\Omega) - \kappa(E_\varepsilon)\|_2 = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (181)$$

$$\forall i \geq 1, \|\kappa_i(\Omega)\|_2 = \mathcal{O}_n(\varepsilon) \quad (182)$$

Maintenant que nous avons pu éclaircir un peu le chemin suivi par Hézari et Zelditch dans leur preuve, nous allons revenir sur les invariants spectraux donc la structure explicite est donnée par (179). Melrose les utilise en particulier pour obtenir la pré-compacité pour les classes de domaines isospectaux. Ainsi, pour tout domaine lisse Ω_0 et $n \geq 0$, il y a A_n tel que pour tout Ω ayant le même spectre que Ω_0 :

$$\|\kappa(\Omega)\|_{C^n} \leq A_n$$

Melrose peut donc utiliser les invariants pour obtenir des bornes a priori puis nous allons utiliser un argument de Bootstrap pour l'améliorer. C'est-à-dire que nous allons utiliser cette borne a priori pour pouvoir améliorer la qualité de la majoration.

Commençons par montrer deux inégalités de Poincaré/Sobolev.

6.2.4 L'argument de Bootstrap de Melrose

Dans cette partie, nous allons utiliser abondamment des inégalités dites de Poincaré/Sobolev dont le lecteur pourra trouver les preuves détaillées en annexe 6.9.1 et qui s'énoncent comme suit :

Donnons nous φ une fonction lisse de $\mathbb{R}/l_\varepsilon\mathbf{Z}$ et x_0 tel que $l_\varepsilon\varphi(x_0) = \int \varphi$.

$$\int \varphi^4 \leq 2\delta \int \varphi^2 \int |\varphi'|^2 + \frac{2}{\delta} \left(\int \varphi^2 \right)^2$$

et

$$\int |\varphi|^3 \leq 2\delta \int |\varphi| \int |\varphi'|^2 + \frac{2}{\delta} \int |\varphi| \int \varphi^2$$

Pour obtenir des bornes sur les $\|\kappa_n(\Omega)\|_{C^0}$, nous allons utiliser les invariants b_n présent dans le développement de la trace.

Remarquons d'abord que pour Ω et E_ε isospectraux, l'invariant b_1 assure que :

$$\|\kappa(\Omega)\|_{L^2} = \|\kappa(E_\varepsilon)\|_{L^2}$$

En utilisant l'invariant b_2 , on peut introduire avec les valeurs connues des constantes c_k l'invariant \tilde{b}_2 :

$$\frac{37}{8} \int \kappa(\Omega)^4 - \int \kappa_1(\Omega)^2 = \frac{37}{8} \int \kappa(E_\varepsilon)^4 - \kappa_1(E_\varepsilon)^2 = \tilde{b}_2$$

Avant d'estimer la taille des intégrales sur le domaine Ω , nous allons utiliser les estimations faites précédemment sur $\kappa(E_\varepsilon)$ pour minorer \tilde{b}_2 :

$$\tilde{b}_2 \geq l_\varepsilon \left(\frac{37}{8}(1 - \varepsilon^2)^2 - \frac{9}{4} \frac{\varepsilon^4}{(1 - \varepsilon^2)^5} \right)$$

Dans l'optique de faire une étude de la taille de ε pour lesquelles les résultats de Hézari et Zelditch sont valables, on peut restreindre de la façon suivante pour obtenir une minoration : $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{10}$

$$\tilde{b}_2 \geq \frac{37.6}{8}$$

Nous allons alors utiliser les inégalités de Poincaré/Sobolev pour contrôler la taille de la courbure de Ω .

On commence par remarquer que pour ε suffisamment petit, disons plus petit que $\frac{1}{10}$, on a, $0 < \delta := \frac{2}{37} \frac{1}{\|\kappa\|_{L^2}^2} < 1 < 2l_\varepsilon - 1$ et on obtient donc :

$$\frac{37}{8} \int \kappa^4(\Omega) \leq \frac{1}{2} \int \kappa_1(\Omega)^2 + \frac{37^2}{8} \left(\int \kappa(\Omega)^2 \right)^3$$

En utilisant l'invariant \tilde{b}_2 , il vient :

$$\int \kappa_1^2(\Omega) \leq \frac{1}{2} \int \kappa_1(\Omega)^2 + \frac{37^2}{8} \left(\int \kappa(\Omega)^2 \right)^3 - \tilde{b}_2$$

Ce qui équivaut à :

$$\int \kappa_1(\Omega)^2 \leq \frac{37^2}{4} \left(\int \kappa(E_\varepsilon)^2 \right)^3 - 2\tilde{b}_2$$

D'où :

$$\int \kappa_1(\Omega)^2 \leq \frac{37^2}{4} \left(\frac{2\pi}{1 - \varepsilon^2} \right)^3 - \frac{37.12}{8} \leq 86.10^3$$

pour $0 \leq \varepsilon \leq 0,065$. Pour résumer, nous avons donc borner $\|\kappa(\Omega)\|_{L^2}$ et $\|\kappa_1(\Omega)\|_{L^2}$. Cela va nous permettre de borner $\|\kappa(\Omega)\|_{C^0}$ avec :

$$\|\kappa(\Omega)\|_{C^0} \leq \sqrt{l_\varepsilon} \|\kappa_1(\Omega)\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{l_\varepsilon}} \|\kappa(\Omega)\|_{L^2}$$

Pour $0 \leq \varepsilon \leq 0,065$, obtient avec les bornes précédentes :

$$\begin{aligned} \|\kappa(\Omega)\|_{C^0} &\leq \sqrt{172\pi \cdot 10^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi - \frac{5\pi\varepsilon^2}{4}}} \|\kappa(E_\varepsilon)\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{172\pi \cdot 10^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi - \frac{5\pi\varepsilon^2}{4}}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ &\leq 736,1 \end{aligned}$$

En utilisant notamment que $\int \kappa(E_\varepsilon) = 2\pi$ et $l_\varepsilon \leq 2\pi$

Nous allons maintenant calculer de façon effective la borne sur $\|\kappa(\Omega)\|_{C^0}$ à l'aide d'elle-même.

Hezari et Zelditch utilisent le constat suivant :

$$\begin{aligned} \int (\kappa(\Omega) - \kappa(E_\varepsilon))^2 &= \int \kappa(\Omega)^2 + \int \kappa(E_\varepsilon)^2 - 2 \int \kappa(\Omega)\kappa(E_\varepsilon) \\ &= 2 \int \kappa(E_\varepsilon)^2 - 2 \int \kappa(\Omega)\kappa(E_\varepsilon) \\ &\leq 4\pi \left(\frac{1}{1 - \varepsilon^2} - \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right) \\ &\leq 16\pi\varepsilon^2 \end{aligned}$$

pour $0 \leq \varepsilon \leq 0,065$ car $\int \kappa(\Omega) = \int \kappa(E_\varepsilon) = 2\pi$ et $\sqrt{1 - \varepsilon^2} \leq \kappa(E_\varepsilon) \leq \frac{1}{1 - \varepsilon^2}$.

En continuant à faire des considérations analytiques détaillées en annexe 6.9.2 et en exploitant ces bornes pour améliorer la borne sur $\|\kappa(\Omega) - 1\|_{C^0}$, on obtient :

$$\|\kappa(\Omega) - 1\| \leq 4,55 \cdot 10^5 \sqrt{\varepsilon}$$

Nous avons donc montré la propriété voulue pour $n = 0$.

Nous allons donc à présent donner une méthode pour obtenir, en pratique, les bornes pour des n supérieurs et par récurrence.

Commençons par étudier la formule de l'invariant b_3 :

$$b_3 = c_2 \int \kappa_2(\Omega)^2 + \int q_2(\kappa, \kappa_1)$$

où $q_2(x_0, x_1) = d_{(6,0)}^{(2)} x_0^6 + d_{(4,1)}^{(2)} x_0^4 x_1 + d_{(2,2)}^{(2)} x_0^2 x_1^2 + d_{(0,3)}^{(2)} x_1^3$ avec l'estimation des poids énoncée plus haut.

Nous pouvons ainsi borner $\|\kappa_2(\Omega)\|_{L^2}$ car nous contrôlons $\|\kappa(\Omega)\|_{C^0}$ et $\|\kappa_1(\Omega)\|_{L^2}$.

L'utilisation des inégalités de Poincaré/Sobolev nous permet de facto d'obtenir une borne sur $\|\kappa_1(\Omega)\|_{C^0}$.

Dans le cas général, avec b_{n+1} pour $n \geq 3$, nous supposons avoir des bornes sur $\|\kappa_j(\Omega)\|_{L^2}$ pour $j \in \{0, \dots, n-1\}$ et $\|\kappa_j(\Omega)\|_{C^0}$ pour $j \in \{0, \dots, n-2\}$ et nous avons la formule pour l'invariant b_{n+1} :

$$b_{n+1} = c_n \int \kappa_n(\Omega)^2 + \int q_n(\kappa, \dots, \kappa_{n-1})$$

où $q_n(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{\underline{\beta}} d_{\underline{\beta}}^{(n)} x^{\underline{\beta}}$ avec $\underline{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$ de poids : $W(\underline{\beta}) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\beta_j = 2n+2$.

Cette contrainte permet, comme nous allons le voir dans quelques lignes, de déterminer tous les monômes de q_n et donc de borner $\|\kappa_n(\Omega)\|_{L^2}$ et par conséquent $\|\kappa_{n-1}(\Omega)\|_{C^0}$ avec les inégalités de Poincaré/Sobolev.

Cela est également possible du fait que les c_n sont connus, d'après le papier de Melrose :

$$c_k = \Gamma\left(-k - \frac{3}{2}\right) \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 (4\pi^2(2k+4)!)^k \int \frac{d^{k+1}(1+s^2)^{-1/2}}{ds^{k+1}} ds$$

Comment déterminer les monômes de q_n ? Pour cela, nous avons développé un algorithme en Python permettant de calculer les multi-indices à conserver. Vous trouverez ci-après le code utilisé :

```

def cherche_monome_rec(k, poids):
    if (k==1):
        return [[poids]]
    else:
        l=[]
        for i in range (poids//k + 1):
            for list in (cherche_monome_rec(k-1,poids-k*i)):
                l.append(list+[i])
        return l
    
```

Précisons un peu le fonctionnement de cet algorithme. Le fonctionnement de l'algorithme est récursif et permet en fait d'obtenir un résultat plus général que ce que nous cherchons.

La fonction *cherche_monome_rec* prend en argument *k* qui correspond au nombre de termes dans la somme ou la taille des *k*-uplets à déterminer, et *poids* qui désigne le poids calculé avec la méthode énoncée ci-dessus. Le cas de base correspond au cas trivial où *k* = 1 et où le seul réel solution est trivialement le poids.

On entame par la suite la récursion en remarquant que, à *k* fixé ;

$$\beta_{k-1} \leq \frac{poids}{k}$$

Ainsi, on effectue une recherche des solutions possibles selon les différentes valeurs de β_{k-1} selon l'inégalité ci-dessus.

Pour chacune de ces valeurs l'équation du poids devient :

$$\sum_{j=0}^{j=k-2} (j+1)\beta_j = poids - k * \beta_{k-1}$$

Cette équation a la même structure avec un poids différent. On calcule donc récursivement la solution au rang *k* - 1 avec le poids *poids* - *k* * β_{k-1} .

Pour procéder au calcul, on peut raisonnablement supposer étant donné les résultats dans la littérature que les coefficients devant les monômes sont plus petits que 1. En effet, L. Smith a montré que :

$$4\pi b_2 = \frac{37\sqrt{\pi}}{2^{13}} \int \kappa(\Omega)^4 - \frac{\sqrt{\pi}}{2^{10}} \int \kappa_1(\Omega)^2$$

On y voit que la constante correspondant à q_1 est excessivement petite et peut-être très grossièrement majorée par 1. Avec l'obtention de ces données on peut donc calculer toutes les constantes et obtenir des bornes concrètes pour :

$$\|\kappa(\Omega) - 1\|_{C^n} = \mathcal{O}_n(\varepsilon)$$

Dans les faits, le second énoncé d'Avila-Kaloshin-De Simoi nous permet de nous restreindre au contrôle de la première dérivée de la courbure. En effet, la méthode développée ci-dessus donne une méthode algorithmique pour calculer toutes les bornes jusqu'à la dérivée 39ème. De fait, on peut donc considérer qu'elle est majorée par un certain $K > 0$ et appliquer le théorème.

6.2.5 Preuve du corollaire

PREUVE :

Rappelons que nous souhaitons prouver que nous pouvons appliquer une déformation rigide au disque unité pour obtenir Ω i.e :

$$\partial\Omega = \partial D + fN_0$$

avec $\|f\|_{C^n(\partial D)} = \mathcal{O}_n(\varepsilon)$ pour tout $n \leq 0$.

En appliquant une déformation rigide à $\partial\Omega$, on fait en sorte que ce dernier soit tangent à ∂D en $(1, 0)$ à

gauche de $x = 1$ de sorte qu'en identifiant ce point à $s = 0$, alors la paramétrisation est déterminée de façon unique par :

$$\gamma_{\Omega}(s) = \left(1 - \int_0^s \sin \left(\int_0^{s'} \kappa(\Omega)(s'') ds'' \right) ds', \int_0^s \cos \left(\int_0^{s'} \kappa(\Omega)(s'') ds'' \right) ds' \right)$$

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, la paramétrisation en longueur d'arc de la bordure de D . Alors :

$$\gamma_{\Omega}(s(\theta)) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$$

On veut donc prouver que $r(\theta) = 1 + g(\theta)$ où $g(\theta) = \mathcal{O}_n(\varepsilon)$ dans C^n avec :

$$s(\theta) = \int_0^{\theta} \sqrt{r^2(\theta) + (\partial_{\theta} r)^2} d\theta$$

En mettant en commun ces deux expressions, on obtient que :

$$g(\theta) = \sqrt{\left(1 - \int_0^{s(\theta)} \sin \left(\int_0^{s'} \kappa(\Omega) \right) \right)^2 + \left(\int_0^{s(\theta)} \cos \left(\int_0^{s'} \kappa(\Omega) \right) \right)^2} - 1$$

D'après la proposition 2.1, on a que $\kappa(\Omega)(s) = 1 + h_0(s)$ où $h_0(s) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ dans C^n .

Ainsi :

$$g(\theta) = \sqrt{1 + h_1(s(\theta))} - 1 = h_2(s(\theta))$$

avec $h_1(s) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $h_2(s) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ dans C^n . On peut ensuite raisonner par récurrence pour obtenir le résultat. Mais nous voulons plus précisément quantifier les constantes, ce qui n'a pas encore été fait. La principale difficulté rencontrée est de réussir à calculer les dérivées successives avec un logiciel de calcul formel étant donné que les fonctions s'expriment à l'aide d'intégrales.

6.2.6 Difficultés et travail à mener

Les principales difficultés dans cette partie sont la détermination des constantes qui utilise des constantes universelles renseignées dans la littérature, comme par exemple les c_k . De plus, ces résultats n'étant pas clair, il est difficile de les exploiter, même numériquement, pour calculer les différentes constantes. La définition littérale que donne Melrose dans son papier semble faire dépendre les c_k du domaine ce qui est en contradiction avec cette affirmation. Ce problème représente le principal nuage dans la résolution de ce problème. C'est pourquoi les constantes des proposition 2.1 n'ont pas toutes été calculées et que nous avons privilégié la solution d'utiliser l'énoncé fort du théorème d'Avila-Kaloshin-De Simoi.

6.3 Étude de l'application de billard

Cette partie vise à calculer les constantes concernant le billard.

D'abord on rappelle quelques définitions et notations.

Soit Ω un domaine convexe, on suppose que la frontière $\partial\Omega$ est de C^∞ ayant le périmètre l .

On définit l'espace de phase Π comme :

$$\Pi = \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times [0, \pi]$$

On note un point dans Π par (s, φ) et on définit une application billard comme :

$$\begin{cases} \beta : \Pi \rightarrow \Pi \\ \beta(s, \varphi) = (s_1(s, \varphi), \varphi_1(s, \varphi)) \end{cases}$$

On définit le revêtement de β comme :

$$\begin{cases} \hat{\beta} : \mathbb{R} \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, \pi] \\ \hat{\beta}(s, \varphi) = (\hat{s}_1(s, \varphi), \hat{\varphi}_1(s, \varphi)) \end{cases}$$

Si $\partial\Omega$ est un cercle, on a $\hat{\beta}(x, \varphi) = \hat{\beta}(x + 2\varphi, \varphi)$ Supposons que Ω est quasi-circulaire de façon C^1 , i.e. $\partial\Omega = \partial D + fN_0$, où N_0 est le champ des vecteurs normaux unitaires en $\partial\Omega$, et f est une fonction lisse définie sur $\partial\Omega$, et supposée être suffisamment petite.

On utilise la méthode variationnelle par définir la famille de déformation $\{\Omega_\tau\}_{0 \leq \tau \leq 1}$:

$$\partial\Omega_\tau = \partial D + \tau f N_0$$

Par la définition ci-dessus, on note que $\Omega_0 = D$, $\Omega_1 = \Omega$.

Pour calculer les courbures de la famille $\{\Omega_\tau\}$, on introduit la paramétrisation polaire de Ω_τ :

$$\partial\Omega_\tau : r(\tau, \theta) = 1 + \tau f(\theta)$$

On peut aussi la représenter par l'arc :

$$\gamma(\tau, s(\tau, \theta)) = (r(\tau, \theta) \cos \theta, r(\tau, \theta) \sin \theta)$$

Par cette paramétrisation, on en déduit une représentation de la courbure de Ω_τ :

$$\kappa(\theta) = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{2/3}}$$

où $r = r(\tau, \theta) = 1 + \tau f(\theta)$, $r' = \partial_\tau r(\tau, \theta) = \tau f'$

LEMME :

$$\text{Lorsque } \|f\|_{C^6} < \frac{1}{2}, \quad |\kappa_\tau - 1| \leq 100 \|f\|_{C^6} \tag{183}$$

PREUVE :

$$\begin{aligned} |\kappa_\tau - 1| &= (r^2 + r'^2)^{-3/2} |r^2 + 2r'^2 - rr'' - (r^2 + r'^2)^{3/2}| \\ &= [(1 + f^2) + f'^2]^{-3/2} |(1 + f)^2 + 2f'^2 - (1 + f)f'' - [(1 + f)^2 + f'^2]^{3/2}| \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ ($a, b \in \mathbb{R}$) et le fait que $(1 + f)^2 + f'^2 \geq (1 + f)^2 > 1$ pour $\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{2}$, on obtient les inégalités utiles suivantes :

$$8 = 2^3 \geq (1 + |f| + |f'|)^3 \geq [(1 + f)^2 + f'^2]^{3/2} \geq (1 + f)^2 + f'^2$$

Posons $B := (1 + f)^2 + 2f'^2 - (1 + f)f'' - [(1 + f)^2 + f'^2]^{-3/2}$. On a alors,

$$\begin{aligned} B &\leq f'^2 - f''f - f'' \\ &\leq 3\|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} B &\geq (1 + f)^2 - (1 + f)f'' - (1 + |f| + |f'|)^3 \\ &\geq (1 + f)^2 - (1 + f)f'' - (1 + 3(|f| + |f'|) + 3(|f| + |f'|)^2 + (|f| + |f'|)^3) \\ &\geq 2f - (1 + f)f'' - [3(|f| + |f'|) + 3(|f| + |f'|)^2 + (|f| + |f'|)^3] \\ &\geq -(1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 1^3) \|f\|_{C^6} \\ &\geq -9 \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

toujours avec l'hypothèse $\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, $|B| \leq 9\|f\|_{C^6}$, d'où le résultat voulu.

DÉFINITION :

La première variation de la déformation. On définit la première variation normale de la famille $\{\Omega_\tau\}$ comme :

$$n(\tau, s) = \partial_\tau \gamma(\tau, s) \cdot N(\tau, s)$$

ainsi que la première variation tangentielle :

$$t(\tau, s) = \partial_\tau \gamma(\tau, s) \cdot T(\tau, s)$$

où $N(\tau, s)$ est le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur, et $T(\tau, s)$ est le vecteur tangent unitaire antihoraire.

LEMME :

$$n^2(\tau, s) + t^2(\tau, s) = f^2$$

PREUVE :

Par la définition, $n^2(\tau, s) + t^2(\tau, s) = \partial_\tau^2 \gamma(\tau, s) = f^2(\theta)$

6.3.1 L'angle de « loop »

DÉFINITION :

Un point $(s, \varphi) \in \Pi$ est appelé (p, q) périodique de β , si $\beta^q(s, \varphi) = (s, \varphi)$ et l'orbite $\{\beta^j(s, \varphi)\}_{0 \leq j \leq q-1}$ circule p fois autour de $\partial\Omega$ en direction positive, ce qui est équivalent de dire que :

$$\hat{\beta}^q(s, \varphi) = (s + pl, \varphi)$$

où l est le périmètre, $\hat{\beta}$ est le revêtement de β

Dans l'article suivant, on étudie principalement les orbites $(1, q)$ périodiques, c'est à dire, l'orbite tourne exactement une fois autour $\partial\Omega$. Pour mieux comprendre le $(1, q)$ périodique, on va d'abord introduire l'angle de « loop » par un théorème que l'on va montrer après.

THÉORÈME : 3.2

Soit $\partial\Omega = \partial D + fN_0$, il existe une constante ε_0 suffisamment petite, tel que si $\|f\|_{C^6} \leq \varepsilon_0$, pour chaque $\tau \in [0, 1]$, s un point sur $\partial\Omega$, et $q \geq 2$, il existe un unique angle $\alpha_q(\tau, s) \in (0, \pi)$, tel que l'orbite commence par le point s et revient à s après exactement q réflexion, et $\{\beta^j(s, \varphi)\}_{0 \leq j \leq q-1}$ circule exacte une fois autour de $\partial\Omega$. On appelle $\alpha_q(\tau, s)$ l'angle de « q-loop » de Ω_τ . En plus, $\alpha_q(\tau, s)$ est lisse en s et analytique en τ .

On remarque que le point $(s, \alpha_q(\tau, s))$ n'est pas forcément $(1, q)$ périodique, rien nous assure que l'orbite va revenir avec la même direction. En revanche, un point $(1, q)$ périodique doit avoir le q -loop angle. Cette observation donne le lemme suivant :

LEMME :

(s, φ) est q -périodique si et seulement si :

$$\alpha_q(s) = \varphi$$

La démonstration de ce théorème demande plusieurs lemmes et calculs de constants, on met la preuve du théorème dans l'annexe. Et les lemmes concernent aussi la fonction de « loop » que l'on présente tout de suite.

6.3.2 La fonction de « loop » et la fonction de Melnikov

DÉFINITION :

Soit $\partial\Omega = \partial D + fN_0$, $\|f\|_{C^6} \leq \varepsilon_0$, pour chaque $\tau \in [0, 1]$, s et s' deux points sur $\partial\Omega$ dont la distance $|s - s'| < \frac{l_\tau}{100}$, et $q \geq 2$, on définit la fonction de q -longueur $\Psi_q(s, s')$ comme la longueur de la géodésique définie dans le théorème 3.4. La fonction de « q -loop » est définie comme $L_q(s) = \Psi_q(s, s)$, plus précisément, si on note $\gamma(s)$ la paramétrisation de Ω par l'arc, on a :

$$\begin{aligned} \Psi_q(s, s') &= \sum_{j=0}^{q-1} \|\gamma(s_{j+1}) - \gamma(s_j)\|, s_j = \text{Proj}_1 \beta^j(s, \alpha_q(s, s')) \\ L_q(s) &= \sum_{j=0}^{q-1} \|\gamma(s_{j+1}) - \gamma(s_j)\|, s_j = \text{Proj}_1 \beta^j(s, \alpha_q(s)) \end{aligned}$$

où Proj_1 est la projection par rapport à la première composante.

DÉFINITION :

On définit la fonction de q -Melnikov comme la première variation de la fonction de « q -loop »

$$M_q(\tau, s) = \partial_\tau L_q(\tau, s)$$

Plus précisément, après calcul, on a une forme explicite pour $M_q(\tau, s)$:

$$\begin{aligned} M_q(\tau, s) &= n(\tau, s)(\sin(\vartheta_q(\tau, s)) + \sin(\vartheta_0(\tau, s))) + t(\tau, s)(\cos(\vartheta_q(\tau, s)) + \cos(\vartheta_0(\tau, s))) \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{q-1} n(\tau, s_j(\tau, s))(\sin(\vartheta_j(\tau, s))) \end{aligned} \tag{184}$$

où $n(\tau, s)$ et $t(\tau, s)$ sont la première variation normale et la première variation tangentielle, où $\{s_j(t, s), \vartheta_j(\tau, s)\}_{j=0}^q$ est le « q -loop » engendré par $(s, \alpha_q(s))$,

PROPOSITION :

lorsque $\|f\|_{C^6} \leq \varepsilon_0$, $|M_q(\tau, s)| \leq (6\pi + 2)|f|$, où $\varepsilon_0 = 2.10^{-86}$

PREUVE :

Dans l'expression de $M_q(\tau, s)$, on majore $n(\tau, s)$ et $t(\tau, s)$ par $|f|$ par l'identité $n^2 + t^2 = f^2$, on obtient :

$$|M_q(\tau, s)| \leq 2 \left(1 + \sum_{j=1}^{q-1} \vartheta(s, \tau) \right) |f| + 2|f|$$

Puis dans le lemme 3.11, lorsque $\|f\|_{C^6} \leq \varepsilon_0$, on a $\sum_{j=1}^{q-1} \vartheta(s, \tau) \leq \frac{1}{2}l_\tau \max \kappa_\tau \leq 3\pi$, finalement, on en déduit :

$$|M_q(\tau, s)| \leq (6\pi + 2)|f|$$

6.4 Développement perturbatif de l'application de billard $\hat{\beta}_\tau$

Pour pouvoir étudier les rebonds d'une trajectoire de billard donnée, autrement dit les itérés $\hat{\beta}_\tau^q$, il nous faut déjà étudier l'application de billard $\hat{\beta}_\tau$, ce que propose le lemme suivant qui établit un contrôle perturbatif par rapport au cas du cercle.

LEMME : 3.11

Pour $\|f\|_{C^6} < \varepsilon_0$, on a l'écriture suivante :

$$\hat{\beta}_\tau(x, \varphi) = (x + 2\varphi + P_\tau(x, \varphi), \varphi + Q_\tau(x, \varphi)) \tag{185}$$

où P_τ et Q_τ sont des fonctions analytiques périodiques en x de période l_τ et vérifient pour $0 \leq \tau \leq 1, x \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\forall i, j, k = 0, 1, \quad |\partial_\tau^i \partial_x^j \partial_\varphi^k P_\tau(x, \varphi)| \leq \varphi^{1-k} C_1 \|f\|_{C^6} \tag{186}$$

$$|\partial_\tau^i \partial_x^j \partial_\varphi^k Q_\tau(x, \varphi)| \leq \varphi^{2-k} C_2 \|f\|_{C^6} \tag{187}$$

où $C_1, C_2 > 0$ sont des constantes à déterminer. On note aussi : $C_0 = \max(C_1, C_2)$

Remarques :

- si $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$, on obtient les mêmes bornes en remplaçant φ par $\pi - \varphi$ par symétrie ;
- si $f = 0$ ou $\tau = 0$, on a $\hat{\beta}_\tau(x, \varphi) = (x + 2\varphi, \varphi)$, ce qui correspond bien à l'application de billard du cercle unité, d'où le fait qu'il s'agit d'un résultat perturbatif.

La difficulté principale dans le calcul des constantes a été le contrôle des dérivées partielles de la courbure κ_τ par rapport aux différentes variables x, φ, τ et des quantités dérivées intervenant dans preuve, qui ne pouvait pas se faire directement : en effet, par exemple, κ_τ s'écrit comme une fraction rationnelle en x (à travers $f(\theta)$) et τ , ce qui rend impossible le calcul explicite puis la majoration "à la main" car l'on doit parfois considérer des dérivées d'ordre au moins 6.

Ainsi, nous avons eu recours à une méthode de majoration utilisant des polynômes qui permettait de s'affranchir du calcul explicite des dérivées successives tout en fournissant un algorithme de calcul donnant facilement les majorations voulues. Le coût de cette méthode est que les majorations sont plus grossières, ce qui a entraîné des constantes assez élevées. Pour plus de détails sur cette méthode de calcul, le lecteur est invité à se référer à l'annexe.

Bilan : Les constantes trouvées sont :

$$\boxed{C_0 = 3.10^{90} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 = 2.10^{-86}} \tag{188}$$

6.5 Étude du spectre de longueur

On rappelle les notations introduites dans l'article. Soit Ω un domaine lisse strictement convexe. Pour $1 \leq p \leq \frac{q}{2}$, on définit $\mathcal{L}_{p,q}(\Omega)$ l'ensemble des longueurs des orbites périodiques de type (p, q) , i.e. faisant q réflexions et p tours le long de Ω dans le sens anti-horaire.

DÉFINITION :

On appelle spectre des longueurs de Ω ,

$$\mathcal{L}(\Omega) = \overline{\cup_{1 \leq p \leq \frac{q}{2}} \mathcal{L}_{p,q}(\Omega)}$$

On définit également :

$$\begin{aligned} T_{p,q} &:= \sup \mathcal{L}_{p,q}(\Omega) \\ t_{p,q} &:= \inf \mathcal{L}_{p,q}(\Omega) \end{aligned}$$

D'après Marvizi-Melrose [MaMe82], pour p fixé, quand $q \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} T_{p,q} - t_{p,q} &= O(q^{-k}) \\ T_{p,q} &\sim pl + \sum_{k \geq 1} c_{k,p}(\Omega) q^{-2k} \end{aligned}$$

où l est le périmètre de Ω . Hezari et Zelditch font remarquer en particulier que les multiples entiers de l font partie du spectre de longueur de Ω .

Ils introduisent ensuite la fonction de Mather β strictement convexe sur $[0, \frac{1}{2}]$ et qui vérifie pour les nombres rationnels :

$$\beta\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{1}{q} T_{p,q}$$

Enfin, les auteurs utilisent la notation suivante pour $q \geq 2$,

$$T_q = T_{1,q} \quad \text{et} \quad t_q = t_{1,q}$$

LEMME : 4.1

$(T_q)_{q \geq 2}$ est strictement croissante vers l et $(T_{q+1} - T_q)_{q \geq 2}$ est strictement décroissante. Ce résultat est obtenu en exploitant la convexité de la fonction de Mather sur $[0, \frac{1}{2}]$

LEMME : 4.3

Soit $\partial\Omega_\tau := \partial E_0 + \tau f N_0$ une déformation quasi-circulaire dans C^6 . Supposons que $\|f\|_{C^8} \leq 1$ et $\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{200}$ de telle sorte que $\kappa_\tau \geq \frac{1}{2}$ d'après (183). Alors, uniformément pour $\tau \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} T_q - t_q &= q^{-3} O(\|f\|_{C^6}) + O(q^{-4}) \\ T_q &= l_\tau - \frac{1}{4} \left(\int_0^{l_\tau} \kappa_\tau^{2/3}(s) ds \right)^3 q^{-2} + q^{-3} O(\|f\|_{C^6}) + O(q^{-4}) \end{aligned}$$

On remarque que ce résultat constitue une expression plus quantitative du résultat de Marvizi-Melrose énoncé ci-dessus.

PREUVE :

Quitte à majorer τ par 1, on peut supposer sans pertes de généralités que $\tau = 1$ pour obtenir une majoration uniforme pour $\tau \in [0, 1]$.

Pour montrer ce résultat, nous allons utiliser les coordonnées de Lazutkin définissant un difféomorphisme de $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ dans \mathbb{R}/Z par :

$$\xi = \frac{\int_0^s \kappa^{2/3}(s') ds'}{\int_0^l \kappa^{2/3}(s') ds'}$$

Nous allons étudier les orbites circulaires de type $(1, q)$. Pour cela, on note $\{(s_j, \varphi_j)\}_{j=0}^{q-1}$ une telle orbite et $\{\xi_j\}_{j=0}^{q-1}$ les coordonnées de Lazutkin correspondants aux $\{s_j\}_{j=0}^{q-1}$.

Ainsi, d'après l'appendice A de [DKW16], il existe une fonction lisse 1-périodique α définie avec κ et vérifiant $\|\alpha\|_{C^4} = \mathcal{O}(\|(1/\kappa)'\|_{C^5})$ et telle que :

$$\xi_j = \frac{j}{q} + \frac{\alpha(j/q)}{q^2} + \frac{\mathcal{O}(\|(1/\kappa)'\|_{C^3})}{q^4}$$

pour $1 \leq j \leq q-1$.

Nous souhaitons préciser ce résultat mais la présence de constantes universelles à déterminer dans l'appendice A de [DKW16] nous met en échec pour le moment.

Sachant que $\kappa \geq \frac{1}{2}$, on obtient que :

$$\mathcal{O}(\|(1/\kappa)'\|_{C^3}) = \mathcal{O}(\|f\|_{C^6})$$

Soit $s(\xi)$ la fonction inverse de $\xi(s)$ et $\tilde{\gamma}(\xi) = \gamma(s(\xi))$.

On note alors :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=0}^{q-1} \|\gamma(s_{j+1}) - \gamma(s_j)\| \\ &= \sum_{j=0}^{q-1} \|\tilde{\gamma}(\xi_{j+1}) - \tilde{\gamma}(\xi_j)\| \end{aligned}$$

Avec le développement précédent des coordonnées de Lazutkin :

$$T = \sum_{j=0}^{q-1} \left\| \tilde{\gamma} \left(\frac{j+1}{q} + \frac{\alpha((j+1)/q)}{q^2} \right) - \tilde{\gamma} \left(\frac{j}{q} + \frac{\alpha(j/q)}{q^2} \right) \right\| + \frac{\mathcal{O}(\|f\|_{C^6})}{q^3}$$

Pour calculer plus explicitement la somme, nous allons utiliser la formule d'Euler-Maclaurin :

Enoncé :

Soit $g(\xi) \in C^\infty[0, 1]$ avec $g^{(k)}(0) = g^{(k)}(1)$ pour tout $k \geq 0$. Alors pour tout $m \geq 1$:

$$\frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} g(j/q) = \int_0^1 g(\xi) d\xi + R_m(g)$$

avec

$$|R_m(g)| \leq \frac{2\zeta(m)}{(2\pi q)^m} \int_0^1 |g^{(m)}(\xi)| d\xi$$

Dans notre cas, on pose naturellement :

$$g(\xi) = \left\| \tilde{\gamma} \left(\xi + \frac{1}{q} + \frac{\alpha(\xi + 1/q)}{q^2} \right) - \tilde{\gamma} \left(\xi + \frac{\alpha(\xi)}{q^2} \right) \right\|$$

g est une fonction 1-périodique sur $[0, 1]$. Ainsi avec la formule d'Euler-Maclaurin pour $m = 4$:

$$T = q \int_0^1 \left\| \tilde{\gamma} \left(\xi + \frac{1}{q} + \frac{\alpha(\xi + 1/q)}{q^2} \right) - \tilde{\gamma} \left(\xi + \frac{\alpha(\xi)}{q^2} \right) \right\| d\xi + \frac{\mathcal{O}(1 + \|f\|_{C^8})}{q^4} + \frac{\mathcal{O}(\|f\|_{C^6})}{q^3}$$

En écrivant le développement de Taylor dans l'intégrande :

$$T = a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^3} + \frac{\mathcal{O}(\|f\|_{C^6})}{q^3} + \frac{\mathcal{O}(1 + \|f\|_{C^8})}{q^4}$$

Avec $a_0 = \int_0^1 \|\tilde{\gamma}'(\xi)\| d\xi = l$ et $a_1 = 0$ et $a_2 = -\frac{1}{4}(\int \kappa^{2/3})^3$ d'après Marvizi-Melrose.

De plus, comme l'asymptotique de $T_{p,q}$ de Marvizi-Melrose ne fait intervenir que des puissances paire de $\frac{1}{q}$, on a $a_3 = \mathcal{O}(\|f\|_{C^6})$ qu'il reste à déterminer explicitement.

Ainsi :

$$T_q = l_\tau - \frac{1}{4} \left(\int_0^{l_\tau} \kappa_\tau^{2/3}(s) ds \right)^3 q^{-2} + q^{-3} \mathcal{O}(\|f\|_{C^6}) + \mathcal{O}(q^{-4})$$

Cela prouve le théorème mais la présence de constantes universelles fait que nous ne pouvons pas encore déterminer les constantes explicitement.

LEMME : 4.4

Soit Υ une orbite (p, q) -périodique avec $p \geq 2$ pour une déformation quasi-circulaire Ω_τ du disque unité dans C^6 . Alors pour $\|f\|_{C^6} \leq \varepsilon'_0 := 3.10^{112}$, la longueur de Υ est minorée par l_τ , uniformément pour $\tau \in [0, 1]$. Ainsi,

$$\mathcal{L}(\Omega_\tau) \cap (0, l_\tau) = \cup_{q \geq 2} \mathcal{L}_{1,q}(\Omega)$$

PREUVE :

Cas du disque unité D : Hezari et Zelditch font remarquer que tout arc de D intersecte la frontière avec le même angle d'incidence noté φ . Alors, la longueur d'un arc vaut $2 \sin \varphi$ et celle d'une trajectoire faisant q rebonds $2q \sin(\varphi)$.

Pour une orbite (p, q) -périodique, on a que $\varphi = \frac{p}{q}\pi$. Il vient donc que la longueur de l'arc est $2q \sin\left(\frac{p}{q}\pi\right)$.

Or $\sin x \geq \frac{x}{2}$ sur $[0, \pi/2]$, d'où,

$$2q \sin\left(\frac{p}{q}\pi\right) \geq 4\pi > 2\pi$$

pour $p \geq 2$ ce qui montre le lemme dans ce cas particulier.

Revenons au cas général : $\partial\Omega_\tau = \partial D + \tau f N_0$ avec $\|f\|_{C^6}$ suffisamment petite. Selon Hezari et Zelditch, l'idée de leur preuve est d'approcher la longueur des orbites (p, q) -périodiques de $\partial\Omega_\tau$ à partir de celles de ∂D à l'aide d'un calcul variationnel.

Soit (x_0, φ_0) un point de départ sur $\partial\Omega_\tau$ d'une orbite (p, q) -périodique de β_τ pour $q \geq 2$. On a alors $q \geq 4$. On peut choisir $\varphi_0 \in [0, \pi/2]$. Il existe alors un unique $k_0 \in \{0, \dots, q\}$ tel que,

$$\frac{(k_0 - \frac{1}{2})\pi}{2q} \leq \varphi_0 \leq \frac{(k_0 + \frac{1}{2})\pi}{2q}$$

Montrons d'abord que $k_0 \geq 4$. Considérons pour cela $(x_j(\tau), \varphi_j(\tau)) = \hat{\beta}_\tau^j(x_0, \varphi_0)$ avec $0 \leq j \leq q$. Comme (x_0, φ_0) est le point de départ d'une orbite (p, q) -périodique, on a : $x_q(\tau) - x_0 = pl_\tau$

Supposons par l'absurde que $k_0 \leq 3$, alors d'après le lemme 3.14, pour $\delta := 100\varepsilon_0 > 0$, on a $\varphi_j(\tau) \leq \frac{7\pi(1+\delta)}{4q}$ pour $\|f\|_{C^6} \leq \varepsilon_0 = 2.10^{-86}$. De plus, d'après la preuve du corollaire (3.15), on a : $|l_\tau - 1| \leq 4\pi \|f\|_{C^6}$, d'où $l_\tau \geq 2\pi(1 - \delta)$. Il vient,

$$\sum_{j=0}^{q-1} \varphi_j(\tau) \leq \frac{7\pi(1 + \delta)}{4}$$

Or,

$$\frac{2}{\kappa_{\max}} \varphi \leq x_1 - x \leq \frac{2}{\kappa_{\min}} \varphi$$

d'après (6.9.3) Donc,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\kappa_{\tau, \min}} \sum_{j=0}^{q-1} \varphi_j(\tau) &\geq x_q - x_0 \\ \sum_{j=0}^{q-1} \varphi_j(\tau) &\geq \frac{\kappa_{\tau, \min}}{2} (x_q - x_0) \\ [\kappa_{\tau} \geq 1 - 100 \|f\|_{C^6} \geq 1 - \delta] &\geq \frac{1 - \delta}{2} (x_q - x_0) \\ &\geq \frac{(1 - \delta)}{2} pl_{\tau} \\ [p \geq 2] &\geq 2\pi(1 - \delta)^2 \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} 2\pi(1 - \delta)^2 &\leq \frac{7\pi(1 + \delta)}{4} \\ \iff \frac{8}{7} &\leq \frac{(1 + \delta)}{(1 - \delta)^2} \end{aligned}$$

ce qui absurde avec la valeur de δ choisie. D'où $k_0 \geq 4$.

Les auteurs considèrent alors l'orbite partielle $\{(x_j(\tau), \varphi_j(\tau))\}_{j=0}^{q_0}$ avec :

$$q_0 = \begin{cases} \left\lfloor \frac{4q}{k_0} \right\rfloor + 1 & \text{si } k_0 \geq 5 \\ q & \text{si } k_0 = 4 \end{cases}$$

Comme $q \geq k_0 \geq 4$, on obtient que $q \geq q_0$. Hezari et Zelditch en déduisent donc que minorer l'orbite partielle permet de minorer l'orbite totale.

Ils posent alors :

$$b(\tau) = \sum_{j=0}^{q-1} \|\gamma(\tau, x_{j+1}(\tau)) - \gamma(\tau, x_j(\tau))\|$$

On a que $b(0) = 2q_0 \sin(\varphi_0)$ (cas du disque D). Le théorème des accroissements finis donne pour tout $\tau \in [0, 1]$,

$$|b(\tau) - 2q_0 \sin(\varphi_0)| \leq \sup_{\tau \in [0, 1]} |\partial_{\tau} b_{\tau}|$$

De plus, à l'aide des lemmes 3.7 et 3.9, les auteurs écrivent $\partial_{\tau} b_{\tau}$ comme :

$$\partial_{\tau} b(\tau) = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

où,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \cos(\varphi_{q_0}(\tau)) \partial_{\tau} x_{q_0}(\tau) \\ \Sigma_2 &= n(\tau, x_0) \sin(\varphi_0) - t(\tau, x_0) \cos(\varphi_0) + n(\tau, x_{q_0}(\tau)) \sin(\varphi_{q_0}(\tau)) + t(\tau, x_{q_0}(\tau)) \cos(\varphi_{q_0}(\tau)) \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^{q_0-1} n(\tau, x_j(\tau)) \sin(\varphi_j(\tau)) \end{aligned}$$

On veut alors borner $|\Sigma_1|$ et $|\Sigma_2|$. On rappelle pour cela que,

$$\varphi_0 \leq \frac{(k_0 + \frac{1}{2})\pi}{2q} \leq \frac{4\pi}{q_0 - 1}$$

En effet, si $k_0 \geq 5$, $q_0 - 1 \leq \frac{4q}{k_0}$, donc $\frac{4\pi}{q_0 - 1} \geq \frac{\pi k_0}{q} \geq \frac{(k_0 + \frac{1}{2})\pi}{2q}$.

Si $k_0 = 4$, $q_0 = q$ et $\frac{(k_0 + \frac{1}{2})\pi}{2q} = \frac{9\pi}{4q} \leq \frac{4\pi}{q-1}$

On en déduit que $q_0\varphi_0 \leq \frac{20}{3}\pi$ comme on peut vérifier que $q_0 \geq 4$. D'après le théorème 3.13 appliqué avec $C = 8\pi$, on a :

$$\begin{aligned} |\Sigma_1| &\leq |\partial_\tau x_{q_0}(\tau)| \\ &\leq \left(\frac{20}{3}\pi\right)^3 e^{\frac{40}{3}\pi} 3 \cdot 10^{90} \|f\|_{C^6} \\ &\leq 1,4 \cdot 10^{111} \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

pour $\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{2\pi C_0}$ donc pour $\|f\|_{C^6} \leq 5 \cdot 10^{-92}$

Pour majorer $|\Sigma_2|$, on remarque par le lemme 3.1 que $|n| \leq \|f\|_{C^6}$ et $|t| \leq \|f\|_{C^6}$. De plus, d'après le théorème 3.13 et (6.9.3), pour $\|f\|_{C^6} \leq 10^{-111}$ et $\delta = 100\varepsilon_0 \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{q_0-1} |\sin(\varphi_j(\tau))| &\leq \sum_{j=1}^{q_0-1} \varphi_j(\tau) \\ &\leq \frac{\kappa_{\tau, \max}}{2} (x_{q_0}(\tau) - x_0) \\ &\leq \frac{1+\delta}{2} (x_{q_0}(\tau) - x_0) \\ &\leq \frac{1+\delta}{2} \left(\frac{40}{3}\pi + \left(\frac{20}{3}\pi\right)^3 \cdot e^{\frac{40}{3}\pi} \cdot 3 \cdot 10^{90} \|f\|_{C^6} \right) \\ &\leq \frac{1+\delta}{2} 27\pi \\ &\leq 32\pi \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |b(\tau) - 2q_0 \sin(\varphi_0)| &\leq (1,4 \cdot 10^{111} + (64\pi + 4)) \|f\|_{C^6} \\ &\leq 2 \cdot 10^{111} \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

Donc,

$$b(\tau) \geq \frac{4q_0\varphi_0}{\pi} - 2 \cdot 10^{111}$$

Or $\varphi_0 \geq \frac{(k_0 - \frac{1}{2})\pi}{2q}$ et $q_0 \geq \frac{4q}{k_0}$ d'où,

$$\begin{aligned} \frac{4q_0\varphi_0}{\pi} &\geq \frac{4}{\pi} \frac{4q}{k_0} \frac{(k_0 - \frac{1}{2})\pi}{2q} \\ &\geq \frac{8(k_0 - \frac{1}{2})}{k_0} \\ &\geq 8 - \frac{4}{k_0} \\ [k_0 \geq 4] &\geq 7 \end{aligned}$$

soit,

$$b(\tau) \geq 7 - 2 \cdot 10^{111} \|f\|_{C^6} > 2\pi$$

pour $\boxed{\|f\|_{C^6} \leq 3 \cdot 10^{-112}}$. D'où le résultat voulu.

Supposons $\partial\Omega_\tau = \partial D + \tau f N_0$, dans les deux lemmes suivants, la condition du théorème 3.2 sur f est prérequis, pour que la fonction de « q-loop » soit bien définie.

LEMME : 4.5

Pour tout $q \geq 2$,

$$\left| L_q(s) - 2q \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \right| \leq (6\pi + 2) \|f\|_{C^6}$$

par conséquent,

$$|T_q - t_q| \leq (12\pi + 4) \|f\|_{C^6}$$

PREUVE :

Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$|L_q(\tau, s) - L_q(0, s)| \leq \sup_{\tau \in [0,1]} |\partial_\tau L_q(\tau, s)| = \sup_{\tau \in [0,1]} |M_q(\tau, s)|$$

Comme Ω_0 est le cercle unité, on a une forme explicite pour la fonction de « q-loop », en effet on peut calculer directement que $L_q(0, s) = 2q \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)$. Enfin par le lemme 3.10 qui donne une estimation sur $M_q(\tau, s)$, on a :

$$\left| L_q(s) - 2q \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \right| \leq (6\pi + 2) \|f\|_{C^6}$$

Enfin on constate que l'estimation au-dessus ne dépend pas de s , et elle est valide aussi pour les valeurs maximales (ainsi que les valeurs minimales), cela implique que :

$$|T_q - t_q| \leq \left| T_q - 2q \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \right| + \left| t_q - 2q \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \right| \leq (12\pi + 4) \|f\|_{C^6}$$

LEMME : 4.6

Soit $\partial\Omega_\tau = \partial D + \tau f N_0$ et Ω quasi-circulaire en C^6 , on suppose que $\|f\|_{C^6} \leq \min\left\{\frac{1}{1000A}, \frac{1}{100(12\pi+4)}\eta_0\right\} := \aleph_0$, où $\eta_0 = 2(q_0 + 1) \sin(\pi/(q_0 + 1))2q_0 \sin(\pi/q_0)$, $q_0 = 1000B$. On suppose de plus que $\|f\|_{C^8} \leq 1$.

Pour $q \geq q_0$, on a :

$$\begin{aligned} t_{q+1}(\tau) - T_q(\tau) &\geq \frac{1}{10(q+1)^3} \\ T_q(\tau) - t_q(\tau) &\leq \frac{1}{100(q+1)^3} \end{aligned}$$

pour $q \leq q_0$, on a :

$$\begin{aligned} t_{q+1}(\tau) - T_q(\tau) &\geq \frac{\eta_0}{10} \\ T_q(\tau) - t_q(\tau) &\leq \frac{\eta_0}{100} \end{aligned}$$

PREUVE :

Le lecteur est invité à se référer à la démonstration présente en annexe.

6.5.1 Spectre de longueur pour une ellipse quasi-circulaire

Pour finir cette partie, les auteurs appliquent les résultats précédents à une ellipse E_ε de faible excentricité ε , i.e. quasi-circulaire dans C^6 . Nous pouvons donc écrire $\partial E_\varepsilon = \partial D + f N_0$ et il faut trouver maintenant une condition sur ε reliée à $\|f\|_{C^6}$ pour pouvoir appliquer ce qui précède. Pour ce faire, il suffit de se restreindre à $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ par symétrie de l'ellipse. $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \theta)$ donc $r(\theta) = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta}$, d'où $f(\theta) = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} - 1$ et,

$$f'(\theta) = -\varepsilon^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}$$

Remarquons que $|f(\theta)| \leq \|f'\|_\infty |\varepsilon^2 \sin^2 \theta| \leq \|f'\|_\infty$ pour $\varepsilon < 1$, ce qui montre qu'il suffit d'obtenir des majorations de $\|g^{(n)}\|_\infty$, $n = 0, \dots, 5$ avec,

$$g(\theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}$$

On implémente le calcul sur SAGEMATH :

```
theta = var('theta')
eps = 10**(-4)

g(theta) = sin(theta) * cos(theta) * (1-eps^2 * sin(theta)^2)**(-1/2)

for n in [0..5]:
    print("n_□=□", n)

    h = find_local_maximum(abs(g), 0, pi/2)[0]
    print(h)

    g(theta) = diff(g, theta)
```

et on obtient alors les constantes suivantes :

```
n = 0
0.50000000125
n = 1
1.0
n = 2
2.000000005
n = 3
3.99999997
n = 4
8.000000020000007
n = 5
15.999999400000004
```

Ainsi, on a,

$$\|f\|_{C^6} \leq 16\varepsilon^2$$

et pour $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}_0 := 4.10^{-57}$, $\|f\|_{C^6} < 3.10^{-112}$, ce qui permet d'affirmer que pour une telle excentricité on a,

$$(0, l_\varepsilon) \cap \mathcal{L}(E_\varepsilon) = \cup_{q \geq 2} \mathcal{L}_{1,q}(E_\varepsilon)$$

C'est pourquoi, Hezari et Zelditch ne s'intéresse qu'au q -spectre, i.e. aux longueurs des orbites $(1, q)$ -périodiques.

Comme l'ellipse est entièrement intégrable pour $q \geq 3$, ils en concluent que toutes les orbites du type $(1, q)$ ont la même longueur donc que $T_q = t_q$. On a donc,

$$(0, l_\varepsilon) \cap \mathcal{L}(E_\varepsilon) = \{t_2(\varepsilon) \leq T_2(\varepsilon) < T_3(\varepsilon) < \dots\}$$

et la suite $\{T_{q+1}(\varepsilon) - T_q(\varepsilon)\}_{q=1}^\infty$ est strictement décroissante d'après le lemme 4.1.

6.6 Étude de la trace des ondes et de la paramétrisation de Marvizi-Melrose

Comme précédemment le contexte est celui d'un domaine Ω dont le bord est lisse et tel que $\partial\Omega = \partial E_0 + f(\theta)N_0$ où f est une fonction lisse sur le cercle unité.

On considère la trace des ondes du Laplacien positif sur le domaine Ω avec conditions au bord de Neumann ou Dirichlet :

$$\omega_\Omega(t) = \text{tr} \cos t\sqrt{\Delta_\Omega}$$

Nous allons être amené, dans cette partie à étudier les propriétés de cet objet.

6.6.1 La paramétrisation de Marvizi-Melrose

Notons $\text{SingSupp}\omega_\Omega$ le support singulier de ω_Ω . D'après Andersson-Melrose, on a :

$$\text{SingSupp}\omega_\Omega \subset -\mathcal{L}(\Omega) \cup \{0\} \cup \mathcal{L}(\Omega) \tag{189}$$

Pour étudier la trace des ondes, nous allons restreindre la fonction à l'aide d'une fonction de coupure pour étudier les longueurs des orbites qui nous intéressent.

D'après les lemmes 4.6 et 4.4, pour $\|f\|_{C^6} \leq 3.10^{-112}$ et pour $\tau = 1$, on peut trouver une fonction de coupure $\hat{\chi}_q \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[t_q, T_q]$ et ne contenant aucune longueur de $\mathcal{L}_{1,m}$ avec $m \neq q$. On peut alors noter :

$$\hat{\sigma}_{1,q}(t) = \hat{\chi}_q(t)\omega_\Omega(t)$$

Marvizi-Melrose ont prouvé le théorème suivant pour tout domaine strictement convexe.

THÉORÈME : 5.1

Pour $q \geq q_0(\Omega)$ suffisamment grand, nous avons la paramétrisation de la forme :

$$\hat{\sigma}_{1,q}(t) = \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} \text{Re} \left(e^{i\pi r_q/4} e^{i\xi(t-L_q(s))} \xi^{\frac{1}{2}} a(q, t, s, \xi) \right) ds d\xi + R_q(t)$$

où R_q est une fonction lisse, L_q est la fonction q -loop définie précédemment, r_q est un indice de Maslov dépendant des conditions au bord et de q et :

$$a(q, t, s, \xi) \underset{\xi \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(q, t, s) \xi^{-j}$$

avec $a_0(q, t, s) = a_0(q, s)$ indépendant de t et positive sur le bord $\partial\Omega$.

Dans le cadre d'un domaine quasi-circulaire, Hezari-Zelditch prouvent que la paramétrisation ci-dessus est valable pour tout $q \geq 2$.

THÉORÈME : 5.2

Supposons Ω quasi-circulaire dans C^8 i.e $\partial\Omega = \partial E_0 + f(\theta)N_0$ avec $\|f\|_{C^8} \leq 3.10^{-112}$. Alors la paramétrisation pour ω_Ω est valide pour tout $q \geq 2$.

PREUVE :

Le seul endroit dans la preuve de Marvizi-Melrose où la grandeur de q est nécessaire est pour prouver

l'existence de la fonction des q -longueurs $\Psi_q(s, s')$ proche de la diagonale $s = s'$ en tant que fonction génératrice de la j -ème itérée du billard β

Or d'après le théorème 3.4, pour $\|f\|_{C^6} \leq 3.10^{-112}$, il existe une fonction lisse $\Psi_q(s, s')$ dans la région $|s - s'| \leq \frac{l(\partial\Omega)}{100}$ pour tout $q \geq 2$. \square

6.7 Longueur spectrale et trace des ondes

Nous allons essayer de palier au problème précédent en déterminant quelles sont les longueurs spectrales présentent dans le support singulier de la trace des ondes.

PROPOSITION : 6.1

Si Ω est quasi-circulaire dans C^8 alors pour tout $q \geq 2$, on a :

$$\{t_q(\Omega), T_q(\Omega)\} \subset \text{SingSupp } \omega_\Omega$$

En réalité, ce théorème a été prouvé, comme précédemment, par Marvizi-Melrose dans le contexte d'un domaine strictement convexe pour des valeurs de q suffisamment grande. Dans notre contexte nous arrivons à généraliser ce résultat à tous les $q \geq 2$.

Nous allons plutôt prouver ce résultat en prouvant le théorème 1.4 énoncé en introduction :

THÉORÈME : 1.4

Soit Ω un domaine quasi-circulaire dans C^8 , plus précisément tel que $\|f\|_{C^8} \leq 3.10^{-112}$. Alors pour tout $q \geq 2$:

$$\mathcal{L}(\Omega) \subset \text{SingSupp } \omega_\Omega$$

Autrement dit, pour un tel domaine, la trace des ondes est singulière à toutes les longueurs des orbites $(1, q)$ -périodiques.

PREUVE :

Par l'absurde, soit $q \geq 2$, supposons qu'il existe t_0 dans $\mathcal{L}_{1,q}(\Omega)$ mais pas dans le support singulier de ω_Ω . Ainsi, il existe un voisinage ouvert J_1 de t_0 tel que $\hat{\sigma}_{1,q}$ est lisse sur J_1 .

On choisit donc une fonction de coupure positive ρ_q à support dans J_1 et qui est positive exactement sur un intervalle ouvert J_2 inclus dans J_1 et contenant t_0 . Par conséquent, $\rho_q(t_0) > 0$. De plus on suppose que les points au bord de $\text{supp } \rho_q = \overline{J_2}$ ne sont pas des valeurs critiques de $L_q(s)$. Cela est possible d'après le théorème de Sard qui stipule que l'ensemble des valeurs critiques de L_q est de mesure nulle.

THÉORÈME : Sard

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m et dans C^r . Si $r > \max(0, n - m)$ alors l'ensemble des valeurs critiques de f est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Par hypothèse sur t_0 , la transformée inverse de $\rho_q(t)\hat{\sigma}_{1,q}(t)$ doit rapidement décroître. Nous allons utiliser le théorème de Soga pour en déduire une contradiction :

THÉORÈME : Théorème de Soga

Considérons :

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\varphi(x)} a(x) dx, \lambda > 1$$

φ et a sont des fonctions lisses et a est à support compact.

Supposons que $a(x) \geq 0$ pour tout x et $a(x) > 0$ pour au moins un point critique dégénéré de φ .

Alors $I(\lambda) \neq \mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$. En effet, $\lambda^* I(\lambda)$ n'est pas dans $L^2(1, +\infty)$ pour un certain $m < \frac{1}{2}$

Nous allons exploiter ce résultat en calculant la transformée de Fourier inverse de $\rho_q \hat{\sigma}_{1,q}$. Pour cela, nous allons également utiliser la paramétrisation déterminée précédemment valable pour $\|f\|_{C^8} \leq 3.10^{-112}$

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \rho_q(t) \hat{\sigma}_{1,q}(t) e^{i\lambda t} dt + \mathcal{O}(\lambda^{-\infty}) \\ &= \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega} e^{i\lambda(t+\xi(t-L_q(s))) + \frac{i\pi r q}{4}} a(q, t, s, \lambda\xi) \xi^{\frac{1}{2}} \rho_q(t) ds d\xi dt \\ &\quad + \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega} e^{i\lambda(t-\xi(t-L_q(s))) - \frac{i\pi r q}{4}} \bar{a}(q, t, s, \lambda\xi) \xi^{\frac{1}{2}} \rho_q(t) ds d\xi dt \\ &\quad + \mathcal{O}(\lambda^{-\infty}) \end{aligned}$$

On utilise le théorème de Soga dans l'intégrale en $d\xi dt$. Nous avons deux fonctions de phase :

$$\Phi_1(t, s, \xi) = t + \xi(t - L_q(s))$$

$$\Phi_2(t, s, \xi) = t - \xi(t - L_q(s))$$

Les points critiques de Φ_1 sont donnés par $\xi = -1$ et $t = L_q(s)$, la première intégrale va rapidement décroître étant donné que $\xi = -1$ n'appartient pas au domaine intégral. De la même manière, les points critiques de Φ_2 sont donnés par $\xi = 1$ et $t = L_q(s)$, on obtient alors par le théorème de la phase stationnaire :

$$I(\lambda) = \pi \lambda^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi r q}{4}} \int_{\partial\Omega} e^{i\lambda L_q} a_0(q, s) \rho_q(L_q(s)) ds + \mathcal{O}(\lambda^{-\frac{1}{2}})$$

Nous allons maintenant utiliser le lemme 3.7 stipulant que les points critiques de $L_q(s)$ correspondent aux orbites $(1, q)$ -périodiques de β .

Soit s_0 un point critique de L_q tel que $L_q(s_0) = t_0$.

Si s_0 est dégénéré, alors on obtient la contradiction voulue par le théorème de Soga.

Il reste donc le cas où toutes les orbites périodiques dont les longueurs sont dans le support de ρ sont non-dégénérées et en nombre fini.

En effet, s'il y avait une infinité de telles orbites, alors elle s'accumulerait en un point critique dégénéré. Ce point dégénéré se trouve forcément sur le bord du support de ρ car sinon on est ramené au premier cas. Or c'est impossible par hypothèse sur $\overline{J_2}$.

Supposons donc que l'ensemble des points critiques de L_q dans $\text{supp}(\rho_q)$ sont en nombre fini et sont composés d'orbites non-dégénérées. En utilisant à nouveau le théorème de la phase stationnaire, on obtient :

$$I_q(\lambda) = \sqrt{2} \pi^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{i\pi r q}{4} + i\lambda t_0} \rho_q(t_0) \sum_{j=0}^r e^{i\frac{\pi}{4} + i\lambda t_0} \rho_q(t_0) \sum_{j=0}^r e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign}(L_q''(s_j))} \frac{a_0(q, s_j)}{\sqrt{|L_q''(s_j)|}} + \mathcal{O}(\lambda^{-\frac{1}{2}})$$

Sachant que $\text{sign}(L_q''(s_j)) = \pm 1$ et $a_0(q, s) > 0$ la somme ne peut pas s'annuler. D'où le résultat.

□

PROPOSITION : Corollaire 6.3

Soit Ω un domaine quasi-circulaire dans C^8 , plus précisément tel que $\|f\|_{C^8} \leq 3.10^{-112}$. Alors,

$$\text{SingSupp } w_\Omega(t) \cap (0, |\partial\Omega|) = \bigcup_{q \geq 2} \mathcal{L}_{1,q}(\Omega)$$

$$\text{SingSupp } w_\Omega(t) \cap (5, |\partial\Omega|) = \bigcup_{q \geq 3} \mathcal{L}_{1,q}(\Omega)$$

PREUVE :

Montrons d'abord la première égalité. Comme indiqué ci-dessus (189), nous avons d'abord,

$$\text{SingSupp } \omega_\Omega \subset -\mathcal{L}(\Omega) \cup \{0\} \cup \mathcal{L}(\Omega)$$

Ensuite, d'après le théorème 1.4 montré ci-dessus, on a :

$$\mathcal{L}_{1,q}(\Omega) \subset \text{SingSupp } w_\Omega(t)$$

et enfin le lemme 4.4 donne pour $\boxed{\|f\|_{C^8} \leq 3.10^{-112}}$,

$$\mathcal{L}_{1,q}(\Omega) \cap (0, |\partial\Omega|) = \bigcup_{q \geq 2} \mathcal{L}_{1,q}(\Omega)$$

La combinaison de ces 3 résultats donne alors directement la première égalité voulue.

Pour la deuxième égalité, on observe que d'après le lemme 4.5, on a pour tout $q \geq 2$:

$$\begin{aligned} T_q &\leq 2q \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) + (6\pi + 2) \|f\|_{C^8} \\ t_{q+1} &\geq 2(q+1) \sin\left(\frac{\pi}{q+1}\right) - (6\pi + 2) \|f\|_{C^8} \end{aligned}$$

En appliquant ceci à $q = 2$, on trouve :

$$\begin{aligned} T_2 &\leq 4 + (6\pi + 2) \|f\|_{C^8} < 5 \\ t_3 &\geq 3\sqrt{3} - (6\pi + 2) \|f\|_{C^8} \geq 5.19 - (6\pi + 2) \|f\|_{C^8} > 5 \end{aligned}$$

et ainsi la seconde égalité s'obtient de la première démontrée précédemment. \square

6.8 Preuve du théorème principal

On reprend les constantes e_0, ε, K du théorème 25 de Avila-de Simoi-Kaloshin.

On considère un domaine Ω lisse ayant le même spectre pour le laplacien (pour les conditions de Dirichlet ou de Neumann) qu'une ellipse E_e d'excentricité $e < \min(\tilde{\varepsilon}_0, \varepsilon, e_0) = \min(4 \cdot 10^{-57}, e_0)$. Alors d'après le corollaire 2.2, Ω est e -quasi-circulaire dans C^8 où la constante associée est notée A_8 (i.e. $\|f\|_{C^8} \leq A_8 e$). Comme K est arbitraire dans le théorème 25, on peut choisir K tel que Ω soit K -quasi-circulaire dans C^{39} . De plus, comme Ω et E_e sont isospectraux, on a que :

$$\text{SingSupp } w_\Omega(t) \cap (0, l_e) = \text{SingSupp } w_{E_e}(t) \cap (0, l_e)$$

en se rappelant que le périmètre $l_e := l(\partial E_e) = l(\partial \Omega)$ car c'est un invariant spectral.

On veut alors appliquer le corollaire 6.3 démontré ci-dessus. Pour cela, on a besoin d'imposer en plus que $e < \frac{3 \cdot 10^{-112}}{A_8}$. On obtient alors,

$$\bigcup_{q \geq 3} \mathcal{L}_{1,q}(\Omega) = \bigcup_{q \geq 3} \mathcal{L}_{1,q}(E_e)$$

Or comme nous avons vu précédemment,

$$\bigcup_{q \geq 3} \mathcal{L}_{1,q}(E_e) = \{T_3(e) < T_4(e) < \dots < T_q(e) < T_{q+1}(e) < \dots\}$$

et la suite $(T_{q+1}(e) - T_q(e))_{q \geq 3}$ est strictement décroissante. Ces propriétés vont se transmettre à Ω . Hezari et Zelditch affirment en effet que $T_q(\Omega) = t_q(\Omega)$ pour $q \geq 3$: par l'absurde, on suppose qu'il existe $q \geq 3$ tel que $t_q(\Omega) < T_q(\Omega)$. Une application du lemme 4.6, valable pour $e < \frac{\aleph_0}{A_8}$, donne alors que :

$$0 < T_q(\Omega) - t_q(\Omega) < t_{q+1}(\Omega) - T_q(\Omega)$$

Ainsi, la longueur de la suite des "gaps" de $\bigcup_{q \geq 3} \mathcal{L}_{1,q}(\Omega)$ ne décroît pas, ce qui est absurde.

Hezari et Zelditch en déduisent alors que pour $q \geq 3$, L_q est constante, autrement dit, il existe une caustique convexe lisse Γ_q de nombre de rotation $1/q$ et donnée par :

$$\Gamma_q = \{(s, \varphi_q(s))\}$$

avec $\varphi_q(s)$ l'angle " q -loop". Ils font alors remarquer que cela signifie exactement que Ω est intégrable rationnellement.

Pour le choix des constantes ci-dessus, le théorème d'Avila-de Simoi-Kaloshin donne finalement que Ω est une ellipse. Mais t_2 et T_2 sont des invariants spectraux d'après le théorème 1.4 déjà démontré et correspondent pour une ellipse aux longueurs des axes de l'ellipse. D'où Ω et E_e sont isométriques, ce qui démontre le théorème de Hezari-Zelditch.

Bilan. Le théorème d'Hezari-Zelditch est valable pour $e < \min \left(4 \cdot 10^{-57}, \varepsilon, e_0, \frac{3 \cdot 10^{-112}}{A_8}, \frac{\aleph_0}{A_8} \right)$.

6.9 Annexe

6.9.1 Deux inégalités de Poincaré/Sobolev

Les inégalités de Poincaré/Sobolev permettent de borner une fonction avec ses dérivées.

Donnons nous φ une fonction lisse de $\mathbb{R}/l_\varepsilon\mathbf{Z}$ et x_0 tel que $l_\varepsilon\varphi(x_0) = \int \varphi$.

A l'aide d'inégalités triangulaires et de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0)| \\ &\leq \int |\varphi'| + \frac{1}{l_\varepsilon} \int |\varphi| \\ &\leq \sqrt{l_\varepsilon} \left(\int |\varphi'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{l_\varepsilon}} \left(\int |\varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|\varphi\|_{C^0} \leq \sqrt{l_\varepsilon} \|\varphi'\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{l_\varepsilon}} \|\varphi\|_{L^2}$$

On peut obtenir une autre équation pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(x)^2 &\leq 2(\varphi(x) - \varphi(x_0))^2 + 2\varphi(x_0)^2 \\ &\leq 2 \int \left| \frac{d}{ds} [(\varphi(s) - \varphi(x_0))^2] \right| + 2\varphi(x_0)^2 \\ &\leq 4 \int |\varphi'| |\varphi - \varphi(x_0)| + 2\varphi(x_0)^2 \\ &\leq 2\delta \int |\varphi'|^2 + \frac{2}{\delta} \int (\varphi - \varphi(x_0))^2 + 2\varphi(x_0)^2 \\ &\leq 2\delta \int |\varphi'|^2 + \frac{2}{\delta} \left(\int \varphi^2 - (2l_\varepsilon - 1)\varphi(x_0)^2 \right) + 2\varphi(x_0)^2 \end{aligned}$$

En particulier, pour δ suffisamment petit : $0 < \delta \leq 2l_\varepsilon - 1$

$$\varphi(x)^2 \leq 2\delta \int |\varphi'|^2 + \frac{2}{\delta} \int \varphi^2$$

On obtient par conséquent :

$$\int \varphi^4 \leq 2\delta \int \varphi^2 \int |\varphi'|^2 + \frac{2}{\delta} \left(\int \varphi^2 \right)^2$$

et

$$\int |\varphi|^3 \leq 2\delta \int |\varphi| \int |\varphi'|^2 + \frac{2}{\delta} \int |\varphi| \int \varphi^2$$

Nous venons donc d'obtenir deux inégalités clés pour mettre en place l'argument de Bootstrap de Melrose.

6.9.2 Argument de Bootstrap dans le cas $n = 0$

Cette annexe fait suite à l'introduction de l'argument de Bootstrap présenté en 6.2.4. Rappelons que nous avons obtenus que :

$$\int (\kappa(\Omega) - \kappa(E_\varepsilon))^2 \leq 16\pi\varepsilon^2$$

pour $0 \leq \varepsilon \leq 0,065$ et que :

$$\|\kappa(\Omega)\|_{C^0} \leq 736,1$$

Nous utilisons également l'égalité des accroissements finis. En effet, on obtient d'après cette dernière l'existence d'un $0 \leq \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$ tel que :

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2} - \sqrt{1-\varepsilon^2} = \tilde{\varepsilon} \frac{2 + (1-\tilde{\varepsilon}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\tilde{\varepsilon}^2)^2} \varepsilon \leq \frac{3}{(1-0,065^2)^2} \varepsilon^2 \leq 4\varepsilon^2$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \int \kappa_1(\Omega)^2 - \int \kappa_1(E_\varepsilon)^2 &= \frac{37}{8} \int (\kappa(\Omega)^4 - \kappa(E_\varepsilon)^4) \\ &\leq \frac{37}{8} \|\kappa(\Omega) - \kappa(E_\varepsilon)\|_{L^2} \|\kappa(\Omega)^3 + \kappa(\Omega)^2 \kappa(E_\varepsilon) + \kappa(\Omega) \kappa(E_\varepsilon)^2 + \kappa(E_\varepsilon)^3\|_{L^2} \\ &\leq \frac{37\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon \sqrt{2\pi} \left(736,1^3 + \frac{736,1^2}{(1-\varepsilon^2)} + \frac{736,1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \\ &\leq 3,283.10^{10} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int \kappa_1(\Omega)^2 \leq 3,283.10^{10} \cdot \varepsilon + \int \kappa_1(E_\varepsilon)^2 \leq 3,284.10^{10} \cdot \varepsilon$$

L'amélioration de cette borne incluant maintenant l'excentricité permet d'améliorer la borne sur $\|\kappa(\Omega)\|_{C^0}$ et a fortiori sur $\|\kappa(\Omega) - 1\|_{C^0}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \|\kappa(\Omega) - 1\|_{C^0} &\leq \sqrt{2\pi} \|\kappa_1(\Omega)\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{l_\varepsilon}} \|\kappa(\Omega) - 1\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{2\pi} \sqrt{3,284.10^{10} \cdot \varepsilon} + \frac{\|\kappa(\Omega) - \kappa(E_\varepsilon)\|_{L^2} + \|\kappa(E_\varepsilon) - 1\|_{L^2}}{\sqrt{2\pi - \frac{5\pi\varepsilon^2}{4}}} \\ &\leq 4,543.10^4 \sqrt{\varepsilon} + \frac{(8\sqrt{\pi} + \sqrt{2\pi \cdot 2,02})\varepsilon}{\sqrt{2\pi - \frac{5\pi\varepsilon^2}{4}}} \\ &\leq 4,55.10^5 \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

pour $0 \leq \varepsilon \leq 0,065$.

6.9.3 Calcul des constantes du lemme 3.11

Tout d'abord, Hezari et Zelditch rappellent un résultat de Lazutkin [La93] qui dit que si l'on dispose d'un ouvert Ω strictement convexe, alors on a :

$$\int_x^{x_1} \sin \left(\varphi - \int_x^{x'} \kappa(x'') dx'' \right) dx' = 0 \tag{190}$$

$$\varphi_1 = \int_x^{x_1} \kappa(x') dx' - \varphi \tag{191}$$

où $(x_1, \varphi_1) = \hat{\beta}(x, \varphi)$ avec $\hat{\beta}$ le revêtement de l'application de billard pour Ω .

On en déduit, par positivité de l'intégrale comme $x_1 \geq x$, que :

$$(x_1 - x)\kappa_{\min} - \varphi \leq \varphi_1 \leq (x_1 - x)\kappa_{\max} - \varphi$$

De plus, on a les inégalités suivantes :

$$\frac{2}{\kappa_{\max}}\varphi \leq x_1 - x \leq \frac{2}{\kappa_{\min}}\varphi$$

d'où il vient que,

$$\left(2\frac{\kappa_{\min}}{\kappa_{\max}} - 1\right)\varphi \leq \varphi_1 \leq \left(2\frac{\kappa_{\max}}{\kappa_{\min}} - 1\right)\varphi$$

On veut maintenant pouvoir borner $P_\tau(x, \varphi)$. Comme,

$$(x_1, \varphi_1) = \hat{\beta}_\tau(x, \varphi) = (x + 2\varphi + P_\tau(x, \varphi), \varphi + Q_\tau(x, \varphi))$$

on a que :

$$P_\tau(x, \varphi) = x_1 - x - 2\varphi$$

d'où l'on obtient par les majorations précédentes que :

$$\begin{aligned} P_\tau(x, \varphi) &\leq 2\left(\frac{1}{\kappa_{\tau, \min}} - 1\right)\varphi \\ &\leq 2\frac{1 - \kappa_{\tau, \min}}{\kappa_{\tau, \min}}\varphi \end{aligned}$$

où le minimum sur la courbure est pris ici par rapport à θ à τ fixé. De plus, $|\kappa_\tau - 1| \leq \frac{1}{2}$ pour $\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{200}$ d'après (183), soit $\kappa_\tau \geq \frac{1}{2}$, d'où,

$$P_\tau(x, \varphi) \leq 400\varphi\|f\|_{C^6}$$

De la même façon, on obtient la même borne pour la minoration, donc finalement :

Pour $\ f\ _{C^6} \leq \frac{1}{200}$, $ P_\tau(x, \varphi) \leq 400\varphi\ f\ _{C^6}$

Revenons maintenant à l'équation intégrale (190). En faisant le changement de variables $x' = x + t(x_1 - x)$, on a :

$$\int_0^1 \sin\left(\varphi - \int_x^{x+t(x_1-x)} \kappa_\tau(x'') dx''\right) dt = 0$$

Comme $P_\tau(x, \varphi) = x_1 - x - 2\varphi$, on peut voir P_τ comme fonction implicite solution de :

$$I(\tau, x, \varphi, P) = \int_0^1 \sin\left(\varphi - \int_x^{x+t(2\varphi+P)} \kappa_\tau(x'') dx''\right) dt = 0 \tag{192}$$

Comme les auteurs, nous appellerons ci-dessous P pour désigner P_τ solution de l'équation ci-dessus.

Calculons ensuite $\partial_P I$,

$$\begin{aligned} -\partial_P I &= \int_0^1 \cos \left(\varphi - \int_x^{x+t(2\varphi+P)} \kappa_\tau(x'') dx'' \right) \kappa_\tau(x+t(2\varphi+P)) t dt \\ &= \int_0^1 \cos(\varphi(1-2t) + g(t, x, \varphi, P)) \kappa_\tau(x+t(2\varphi+P)) t dt \end{aligned}$$

où $g(t, x, \varphi, P) := 2t\varphi - \int_x^{x+t(2\varphi+P)} \kappa_\tau(x'') dx''$ que l'on notera parfois g pour alléger les notations, l'argument de la fonction étant sous-entendu ; on écrira également κ_τ ci-dessous pour désigner $\kappa_\tau(x+t(2\varphi+P))$.

$$\begin{aligned} \cos(\varphi(1-2t) + g)\kappa_\tau t &= [\cos(\varphi(1-2t)) \cos g - \sin(\varphi(1-2t)) \sin g] \kappa_\tau t \\ &= t \cos(\varphi(1-2t)) + t \cos(\varphi(1-2t))[(\cos g - 1)\kappa_\tau + \kappa_\tau - 1] \\ &\quad - t \sin(\varphi(1-2t)) \sin(g)\kappa_\tau \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\int_0^1 t \cos(\varphi(1-2t)) dt = \frac{\sin \varphi}{2\varphi}$, on a :

$$\left| -\partial_P I - \frac{\sin \varphi}{2\varphi} \right| \leq \int_0^1 |t \cos(\varphi(1-2t))[(\cos g - 1)\kappa_\tau + \kappa_\tau - 1] - t \sin(\varphi(1-2t)) \sin(g)\kappa_\tau| dt$$

Rappelons que l'on a les bornes suivantes :

$$|\kappa_\tau - 1| \leq 100 \|f\|_{C^6} \tag{193}$$

$$|P| \leq 400 \varphi \|f\|_{C^6} \tag{194}$$

$$\tag{195}$$

pour $\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{200}$

Calculons alors une borne pour $g(t, x, \varphi, P) = 2t\varphi - \int_x^{x+t(2\varphi+P)} \kappa_\tau = \int_x^{x+t2\varphi} (-\kappa_\tau + 1) - \int_{x+2t\varphi}^{x+2t\varphi+P} \kappa_\tau :$

$$\begin{aligned} |g| &\leq 2t\varphi \cdot 100 \|f\|_{C^6} + 400t\varphi |\kappa_\tau| \|f\|_{C^6} \\ &\leq 2t\varphi(100 + 200|\kappa_\tau|) \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

$|\kappa_\tau| \leq \frac{3}{2}$ d'après (193), et on a aussi $0 \leq t \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$|g| \leq 1300 \|f\|_{C^6}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|\cos g - 1| \leq \frac{g^2}{2}$, et $|\sin g| \leq |g|$, il vient :

$$\begin{aligned} \left| -\partial_P I - \frac{\sin \varphi}{2\varphi} \right| &\leq \frac{(1300)^2 \|f\|_{C^6}^2}{2} \cdot \frac{3}{2} + 400 \|f\|_{C^6} + 1300 \|f\|_{C^6} \cdot \frac{3}{2} \\ [\|f\|_{C^6} \leq 1/200] &\leq \frac{17375}{2} \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

soit finalement,

$$\boxed{\left| -\partial_P I - \frac{\sin \varphi}{2\varphi} \right| \leq 9000 \|f\|_{C^6} \quad \text{pour } \|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{200}}$$

Comme $\frac{\sin \varphi}{2\varphi} \geq \frac{1}{\pi}$ pour $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, on obtient que :

$$\boxed{|\partial_P I| \geq \frac{1}{2\pi} \quad \text{pour } \|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{90000}}$$

Le théorème des fonctions implicites garantit alors l'existence et l'unicité de P en tant que solution de l'équation intégrale (192), ce qui justifie la bonne définition de P_τ en tant que solution implicite. De plus, on a que P_τ est différentiable en x, τ, φ et le système d'équations :

$$\partial_\tau P_\tau = -\frac{\partial_\tau I}{\partial_P I} \tag{196}$$

$$\partial_x P_\tau = -\frac{\partial_x I}{\partial_P I} \tag{197}$$

$$\partial_\varphi P_\tau = -\frac{\partial_\varphi I}{\partial_P I} \tag{198}$$

Hezari et Zelditch montrent alors que l'on peut écrire P_τ et Q_τ comme :

$$P_\tau(x, \varphi) = \tau \varphi R_\tau(x, \varphi)$$

$$Q_\tau(x, \varphi) = \tau \varphi^2 S_\tau(x, \varphi)$$

avec,

$$R_\tau(x, \varphi) = \int_0^1 \int_0^1 (\partial_\tau \partial_\varphi P)(u\tau, x, v\varphi) du dv \tag{199}$$

$$S_\tau(x, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (1-v)(\partial_\tau \partial_\varphi^2 Q)(u\tau, x, v\varphi) du dv \tag{200}$$

où $P(\tau, x, \varphi) := P_\tau(x, \varphi)$ (de même pour Q).

Il suffit alors de montrer que :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2; j = 0, 1; k = 1, 2, 3, & \quad |\partial_\varphi^k \partial_x^j \partial_\tau^i P(x, \varphi)| \leq C_3 \|f\|_{C^6} \\ \forall i = 1, 2; j = 0, 1; k = 2, 3, & \quad |\partial_\varphi^k \partial_x^j \partial_\tau^i Q(x, \varphi)| \leq C_4 \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

où $C_3, C_4 > 0$ sont des constantes à déterminer. Une fois cela fait, on peut donner alors une majoration de C_1 et C_2 grâce à (199) et (200) selon :

$$\begin{aligned} C_1 &\leq 4 \cdot \frac{\pi}{2} C_3 \leq 8C_3 \\ C_2 &\leq 2.4 \cdot \frac{\pi}{2} \leq 16C_4 \end{aligned}$$

où le facteur 4 correspond au nombre maximum de termes et le facteur 2 dans la majoration de C_2 à l'exposant 2 qui apparaît lorsque l'on dérive φ^2 .

Pour calculer C_3 et C_4 , on va utiliser le système d'équations donné par le théorème des fonctions implicites (cf. ci-dessus) et la borne suivante :

$$|\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^k \partial_\tau^j I| \leq C_I \|f\|_{C^6} \quad i = 0, 1, 2; (m, k, j) \in E$$

où $C_I > 0$ est une constante à déterminer et où l'on a noté $E = \{(m, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid 0 \leq m \leq 1, 0 \leq k \leq 3, 0 \leq j \leq 1\}$. Nous avons $|E| = 16$. Cela respecte à la contrainte $j + k + m \leq 5$ donnée par Zelditch et Hezari mais nous précisons ici les valeurs prises par chaque variable pour déterminer C_3 et C_4 .

Calcul de C_κ

Pour ce faire, il nous faut d'abord borner $\partial_x^n \partial_\tau^i \kappa_\tau$, $0 \leq n \leq 4, 0 \leq i \leq 2$. La méthode que nous allons exposer ci-dessous montre que nous n'avons besoin de borner que $|\partial_x^4 \partial_\tau^2 \kappa_\tau|$ correspondant donc à l'ordre de dérivation le plus élevé.

Calculons alors $\partial_\tau^2 \kappa_\tau$. Rappelons l'expression de κ_τ :

$$\begin{aligned} \kappa_\tau &= \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \\ [r = 1 + \tau f] \quad \kappa_\tau &= \frac{2\tau^2 f'^2 + (1 + \tau f)^2 - (1 + \tau f)\tau f''}{(\tau^2 f'^2 + (1 + \tau f)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

En posant $u := \tau^2 f'^2 + (1 + \tau f)^2 = \tau^2(f'^2 + f^2) + 2f\tau + 1$, on a :

$$\kappa_\tau = u^{-1/2} + \left[\tau^2(f'^2 - ff'') - \tau f'' \right] u^{-3/2} \tag{201}$$

$$\text{d'où} \quad \partial_\tau \kappa_\tau = \left[-\frac{1}{2}(\partial_\tau u) + 2\tau(f'^2 - ff'') - f'' \right] u^{-3/2} - \frac{3}{2} \partial_\tau u \left[\tau^2(f'^2 - ff'') - \tau f'' \right] u^{-5/2} \tag{202}$$

$$\text{et} \quad \partial_\tau u = 2\tau(f'^2 + f^2) + 2f \tag{203}$$

Ainsi, on obtient les bornes suivantes :

$$\begin{aligned} |\partial_\tau u| &\leq 4 \|f\|_{C^6} \\ |u| &\geq |2f\tau + 1| - \tau^2(f'^2 + f^2) \\ &\geq 1 - 2f\tau - \tau^3(f'^2 + f^2) \\ &\geq 1 - 3 \|f\|_{C^6} \\ \boxed{|u| \geq \frac{99}{100} \quad \text{pour} \quad \|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{300}} & \tag{204} \end{aligned}$$

Ensuite, en dérivant (202) par rapport à τ , on a,

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \kappa_\tau &= \left[-\frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u) + 2(f'^2 - ff'') \right] u^{-3/2} \\ &+ \left[\frac{3}{4}(\partial_\tau u)^2 - 3(\partial_\tau u)(2\tau(f'^2 - ff'') - f'') - \frac{3}{2}(\partial_\tau^2 u)(\tau^2(f'^2 - ff'') - \tau f'') \right] u^{-5/2} \\ &+ \frac{15}{4}(\partial_\tau u)^2 \left[\tau^2(f'^2 - ff'') - \tau f'' \right] u^{-7/2} \\ &= P_{0,3}[f, f', f'']u^{-3/2} + P_{0,5}[f, f', f'']u^{-5/2} + P_{0,7}[f, f', f'']u^{-7/2} \end{aligned}$$

où $P_{0,3}$, $P_{0,5}$ et $P_{0,7}$ sont des polynômes en 3 variables,

et d'après (203),

$$\partial_\tau u = 2\tau(f'^2 + f^2) + 2f$$

d'où,

$$\partial_\tau^2 u = 2(f'^2 + f^2)$$

Par la suite pour un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$, on notera $\|P\|_\infty$ ou parfois simplement $\|P\|$ pour désigner le maximum des coefficients de P et on utilisera la lettre minuscule p pour le degré de P .

Ensuite, on peut remarquer que si $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et si on note r le nombre de termes de P , on a :

$$PQ = \sum_{k=1}^r \sum_{|\beta| \leq \text{deg}(Q)} c_{\alpha_k} c_\beta X^{\alpha_k + \beta} \tag{205}$$

Ainsi, pour $\gamma \in \mathbb{R}^N$, les coefficients devant X^γ sont donnés par :

$$\sum_{\substack{\alpha_k + \beta = \gamma \\ 1 \leq k \leq r \\ |\beta| \leq \text{deg}(Q)}} c_{\alpha_k} c_\beta = \sum_{\substack{1 \leq k \leq r \\ |\gamma - \alpha_k| \leq \text{deg}(Q)}} c_{\alpha_k} c_{\gamma - \alpha_k}$$

dont le module est majoré par $r\|P\| \|Q\|$.

On a alors,

$$\begin{aligned} p_{0,3} &\leq 2 & \|P_{0,3}\| &\leq 2 \\ p_{0,5} &\leq 4 & \|P_{0,5}\| &\leq \frac{3}{4}.8 + 3.3.2.2 + \frac{3}{2}.2.2.1 = 48 \\ p_{0,7} &\leq 6 & \|P_{0,7}\| &\leq \frac{15}{4}.3.8.1 \leq 90 \end{aligned}$$

Enfin, on peut voir également $\partial_\theta u = 2\tau^2 f'(f + f'') + 2\tau f'$ comme un polynôme en f, f', f'' de degré égal à 2 et de norme $\|\partial_\theta u\|_\infty \leq 2$.

Considérons maintenant la quantité suivante pour $n \geq 0$:

$$F_n = \sum_{k \geq 0} P_{n,k}[f, \dots, f^{(n+2)}]u^{-k/2}$$

où les polynômes $P_{n,k}$ sont des polynômes à $n + 3$ variables, nuls à partir d'un certain rang K , ce qui fait que la somme est une somme finie. On pose également $P_{n,k} = 0$ pour tout $k < 0$.

Remarquons que $\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial s}{\partial \theta} = u^{1/2}$ Donc pour toute fonction F dépendant de x , on a : $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \theta} u^{-1/2}$, soit $u^{1/2} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \theta}$.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} u^{1/2} \partial_x F_n &= \partial_\theta F_n \\ &= \sum_{k \geq 0} (\partial_\theta P_{n,k}) u^{-k/2} - \frac{k}{2} (\partial_\theta u) P_{n,k} u^{-(k+2)/2} \\ \partial_x F_n &= \sum_{k \geq 0} (\partial_\theta P_{n,k}) u^{-(k+1)/2} - \frac{k}{2} (\partial_\theta u) P_{n,k} u^{-(k+3)/2} \\ &= \sum_{k \geq 0} \left((\partial_\theta P_{n,k}) u^{-(k+1)/2} - \frac{k}{2} (\partial_\theta u) P_{n,k} u^{-(k+3)/2} \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \left(\partial_\theta P_{n,k-1} - \frac{k-3}{2} (\partial_\theta u) P_{n,k-3} \right) u^{-k/2} \\ \partial_x F_n &= \sum_{k \geq 0} \left(\partial_\theta P_{n,k-1} - \frac{k-3}{2} (\partial_\theta u) P_{n,k-3} \right) u^{-k/2} \end{aligned}$$

Si l'on pose $P_{n+1,k} = \partial_\theta P_{n,k-1} - \frac{k-3}{2} (\partial_\theta u) P_{n,k-3} \in \mathbb{R}[f, \dots, f^{(n+4)}]$ pour $k \geq 0$ et $P_{n+1,k} = 0$ pour $k < 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} F_{n+1} &:= \partial_x F_n \\ &= \sum_{k \geq 0} P_{n+1,k} u^{-k/2} \end{aligned}$$

Réécrivons $P_{n+1,k}$:

$$P_{n+1,k} = \sum_{l=1}^{n+3} \frac{\partial P_{n,k-1}}{\partial X_l} f^{(l+1)} - \frac{k-3}{2} (\partial_\theta u) P_{n,k-3}$$

On obtient ainsi une relation de récurrence reliant F_n et F_{n+1} . Plus précisément, nous pouvons obtenir que :

$$\forall k \geq 0, \quad p_{n,k} \leq \max(p_{n,k-1}, p_{n,k-3} + 2) \tag{206}$$

$$\|P_{n+1,k}\| \leq (n+3)p_{n,k-1} \|P_{n,k-1}\| + 3(k-3) \|P_{n,k-3}\| \tag{207}$$

avec la convention $0 \times -\infty = 0$.

Dans (206), on a utilisé le fait que $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ pour P, Q polynômes, ainsi que $\deg(\partial_\theta P_{0,k-1}) = \deg(P_{0,k-1}) = p_{0,k-1}$ car la dérivation abaisse d'un degré une des i -èmes dérivées de f dans les monômes tout en faisant apparaître sa dérivée par composition.

Dans (207), on a utilisé que $\|\partial_\theta u\|_\infty \leq 2$ (cf. ci-dessus) et l'apparition d'un facteur 3 qui est dû au nombre de termes de $\partial_\theta u$ - voir (205).

En appliquant cet algorithme, nous pouvons ainsi obtenir des majorations de $|\partial_x^4 \partial_\tau^2 \kappa_\tau|$ en appliquant ce qui précède à $F_n := \partial_x^n \partial_\tau^2 \kappa_\tau$. On a alors :

$$|\partial_x^4 \partial_\tau^2 \kappa_\tau| \leq \|f\|_{C^6} \left[\sum_{k \geq 0} \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{R}^7 \\ |\alpha| \leq p_{n,k}}} 1 \right) \|P_{n,k}\|_\infty \left(\frac{100}{99} \right)^{k/2} \right]$$

où l'on a utilisé que l'on travaille avec $\|f\|_{C^6} \leq 1$ et que $|u| \geq \frac{99}{100}$ - voir (204).

Or l'on a :

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{R}^7 \\ |\alpha| \leq p_{n,k}}} 1 \leq (p_{n,k} + 1)^7$$

d'où finalement,

$$|\partial_x^4 \partial_\tau^2 \kappa_\tau| \leq \|f\|_{C^6} \left[\left(\frac{100}{99} \right)^{K/2} \sum_{k \geq 0} \|P_{n,k}\|_\infty (p_{n,k} + 1)^7 \right] \leq C_\kappa \|f\|_{C^6} \text{ pour } \|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{300} \tag{208}$$

où $K := \max\{k \geq 0 \mid P_{i,k} \neq 0\} < \infty$ par construction de la suite de polynômes.

On obtient alors les résultats ci-dessous :

k	$p_{0,k}$	$\ P_{0,k}\ _\infty$	$p_{1,k}$	$\ P_{1,k}\ _\infty$	$p_{2,k}$	$\ P_{2,k}\ _\infty$	$p_{3,k}$	$\ P_{3,k}\ _\infty$	$p_{4,k}$	$\ P_{4,k}\ _\infty$
3	2	2								
4			2	12						
5	4	48			2	96				
6			4	594			2	960		
7	6	90			4	9648			2	11520
8			6	2340			4	194400		
9					6	66852			4	4682880
10			8	1890			6	2208168		
11					8	116640			6	84159648
12							8	6470604		
13					10	56700			8	376834032
14							10	6684120		
15									10	633988944
16							12	1701000		
17									12	403205040
18										
19									14	61236000

On trouve :

$$C_\kappa = 5,5 \cdot 10^{16}$$

Remarque importante : C_κ peut en fait être utilisée pour tous les termes $\partial_x^n \partial_\tau^i \kappa_\tau$ avec $i = 0, 1, 2; 0 \leq n \leq 4; i + n > 0$ car il est facile de voir que pour des ordres de dérivation inférieurs, les constantes trouvées sont plus petites étant donné que les normes infinies, les degrés et le nombre de polynômes non nuls sont plus faibles.

Calcul de C_I

On veut maintenant borner $\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j \partial_\tau^2 I$.

Calculons déjà $\partial_\tau^2 I$.

$$\partial_\tau I = - \int_0^1 \left(\int_x^{x+t(2\varphi+P)} \partial_\tau \kappa_\tau \right) \cos \left(\varphi - \int_x^{x+t(2\varphi+P)} \kappa_\tau \right) dt$$

Dérivons à nouveau par rapport à τ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 I &= - \int_0^1 \left(\int_x^{x+t(2\varphi+P)} \partial_\tau^2 \kappa_\tau \right) \cos \left(\varphi - \int_x^{x+t(2\varphi+P)} \kappa_\tau \right) dt \\ &\quad - \int_0^1 \left(\int_x^{x+t(2\varphi+P)} \partial_\tau \kappa_\tau \right)^2 \sin \left(\varphi - \int_x^{x+t(2\varphi+P)} \kappa_\tau \right) dt \end{aligned}$$

On remarque qu'en dérivant $\partial_\tau^2 I$ par rapport à n'importe quelle variable x, φ, P (variable quelconque que nous noterons désormais z), on obtient toujours une somme de termes avec des facteurs en cos ou sin qui peuvent se majorer simplement par 1. De plus, l'intégrale sur $[0, 1]$ par rapport à dt n'a pas d'importance lorsque l'on majore et l'on peut aussi constater que tout se passe comme si $t = 1$. On notera aussi $v := \int_x^{x+P+2\varphi} \kappa_\tau - \varphi$. Intuitivement, les processus de dérivation font sortir des dérivées partielles de v et les termes en cos et sin ne servent qu'à faire "sortir" ces dérivées partielles dans la dérivation composée.

Estimons les dérivées partielles successives de v . Rappelons que dans notre problème, $m = 0, 1; k = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1$. Nous allons distinguer plusieurs cas :

1er cas : $k, j \geq 1, (m, k, j) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \partial_x v &= \kappa_\tau(x + P + 2\varphi) - \kappa_\tau(x) \\ \partial_\varphi \partial_x v &= 2\partial_x \kappa_\tau(x + P + 2\varphi) \end{aligned}$$

d'où il vient que :

$$|\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j v| \leq 2^k C_\kappa \|f\|_{C^6}$$

2e cas : $j = 0, (m, k, j) \neq 0$.

Si $m = 1$, on a :

$$|\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j v| = 2^k |\partial_x^k \kappa_\tau| \leq 2^k C_\kappa \|f\|_{C^6}$$

Si $m = 0$, on a :

$$\begin{aligned} k = 1, \quad & |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j v| = |\partial_\varphi v| = |2\kappa_\tau(x + P + 2\varphi) - 1| \leq 1 + 2\eta \\ \forall k > 1, \quad & |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j v| = |\partial_\varphi^k v| = |2^k \partial_x^{k-1} \kappa_\tau| \leq 2^k C_\kappa \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la majoration $|\kappa_\tau - 1| \leq \eta$ pour $\eta > 0$ tel que $\|f\|_{C^6} \leq \frac{\eta}{100}$ (dans l'esprit, η est choisi petit) d'après (183).

3e cas : $k = 0, (m, k, j) \neq 0$.

Si $j = 0$ alors $m = 1$ (car $m + k + j > 0$) et :

$$|\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j v| = |\partial_P v| = |\kappa_\tau| \leq 1 + \eta$$

d'après (193) Si $j = 1$ alors $m = 0$ et :

$$\begin{aligned} |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j v| &= |\partial_x v| = |\kappa_\tau(x + P + 2\varphi) - \kappa_\tau(x)| \\ &\leq \sup |\partial_x \kappa_\tau| |P + 2\varphi| \\ [|P + 2\varphi| \leq 2 + 400 \|f\|_{C^6} \leq 4] &\leq 4C_\kappa \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

4e cas : $(m, k, j) = 0$.

$$\begin{aligned} |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j v| &= |v| \leq \sup |\kappa_\tau| |P + 2\varphi| + \varphi \\ [|P + 2\varphi| \leq 4] &\leq 4 \cdot (\eta + 1) + \frac{\pi}{2} \\ &\leq 6 + 4\eta \end{aligned}$$

En résumé, on a :

$$\begin{aligned} (m, k, j) = (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 0), & \quad |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j v| \leq 6 + 4\eta \\ \text{dans les autres cas,} & \quad |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j v| \leq 8C_\kappa \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

Pour $\|f\|_{C^6} \leq \min\left(\frac{1}{8C_\kappa}, \frac{\eta}{100}\right)$, on peut regrouper les dernières bornes sous la forme :

$$\boxed{\forall (m, k, j) \in E, \quad |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j v| \leq 6 + 4\eta} \quad (209)$$

Le pré-facteur dans l'intégrande $w = \int_x^{x+P+2\varphi} \partial_\tau \kappa_\tau$ ne diffère que par le fait que l'on a $\partial_\tau \kappa_\tau$ à la place de κ_τ , ce qui ne change pas la constante commune utilisée C_κ qui ne dépend pas de l'ordre de dérivation par rapport à τ , mise à part dans les cas $(m, k, j) = (1, 0, 0)$, $(m, k, j) = (0, 1, 0)$ et $(m, k, j) = (0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} (m, j, k) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0) & \quad |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j w| \leq 4C_\kappa \|f\|_{C^6} \\ \text{dans les autres cas,} & \quad |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j w| \leq 8C_\kappa \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

ou en regroupant les majorations,

$$\boxed{\forall (m, k, j) \in E, \quad |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j w| \leq 8C_\kappa \|f\|_{C^6}}$$

Enfin, les rôles joués par $\partial_\tau \kappa_\tau$ et $\partial_\tau^2 \kappa_\tau$ sont identiques au niveau des majorations (ces deux fonctions et leurs dérivées par rapport à x étant majorées par $C_\kappa \|f\|_{C^6}$), donc on peut identifier le facteur $\int_x^{x+t(2\varphi+P)} \partial_\tau^2 \kappa_\tau$ à $w = \int_x^{x+t(2\varphi+P)} \partial_\tau \kappa_\tau$.

Suite à la discussion de ce qui précède, nous pouvons donc identifier $\partial_\tau I$ à $G_0 := (w + w^2)f(v)$ où $f \in \{\pm \cos, \pm \sin\}$. On identifie les éléments de cet ensemble si bien que l'on a toujours $f' = f$ et $|f| \leq 1$.

De façon générale, notons $G = Af(v)$ où $A[X_1, \dots, X_{16}, Y_1, \dots, Y_{16}]$ est un polynôme en 16×2 variables évalué en les dérivées partielles possibles de v (correspondant aux monômes X_i) et w (correspondant aux monômes Y_i). En effet, $|E| = 16$ (cf. ci-dessus).

On note de plus p ou $\deg_X(A)$ le degré de A ($q/\deg_Y(A)$ resp.) en tant que polynôme en les variables X_1, \dots, X_{16} (Y_1, \dots, Y_{16} resp.) à coefficients dans $\mathbb{R}[Y_1, \dots, Y_{16}]$ ($\mathbb{R}[X_1, \dots, X_{16}]$ resp). Comme dans ce qui

précède, $\|A\|_\infty$ désigne le maximum des coefficients de A en tant que polynôme à 32 variables.
 . Calculons $\partial_z G$, où z est une variable quelconque parmi x, φ, P :

$$\partial_z G = \left(\sum_{l=1}^{16} \frac{\partial A}{\partial X_l} \partial_z(\partial_{\alpha_l} v) + \frac{\partial A}{\partial Y_l} \partial_z(\partial_{\beta_l} w) + A(\partial_z v) \right) f(v) = \hat{A}f(v)$$

où $\alpha_l, \beta_l \in A$ pour $1 \leq l \leq 16$.

Or, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial A}{\partial X_l} \partial_z(\partial_{\alpha_l} v) \right\|_\infty &\leq p \|A\|_\infty \\ \left\| \frac{\partial A}{\partial Y_l} \partial_z(\partial_{\beta_l} w) \right\|_\infty &\leq q \|A\|_\infty \\ \|A(\partial_z v)\| &= \|A\| \\ \deg_X \left(\frac{\partial A}{\partial X_l} \partial_z(\partial_{\alpha_l} v) \right) &= \deg_X(A) = p \\ \deg_Y \left(\frac{\partial A}{\partial X_l} \partial_z(\partial_{\alpha_l} v) \right) &= \deg_Y(A) = q \\ \deg_X(A(\partial_z v)) &= p + 1 \\ \deg_Y(A(\partial_z v)) &= q \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned} \|\hat{A}\| &\leq (16p + 16q + 1) \|A\| \\ \hat{p} := \deg_X(\hat{A}) &= p + 1 \\ \hat{q} := \deg_Y(\hat{A}) &\leq q \end{aligned}$$

Les majorations étant indépendantes de la variable de dérivation z , on obtient alors directement la majoration suivante pour le polynôme $A_{m,k,j}$ associé à $\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j G_0$:

$$\begin{aligned} [p_0 = 0, q_0 = 2, \|G_0\| = 1] \quad \|A_{m,k,j}\| &\leq \prod_{l=0}^{15} (16l + 33) \leq 7,64.10^{33} \\ \deg_X(A_{m,k,j}) &\leq 17 \\ \deg_Y(A_{m,k,j}) &\leq 2 \end{aligned}$$

et ,

$$\begin{aligned} |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j G_0| &\leq \left(\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{16} \\ |\alpha| \leq 17 \\ 0 < |\beta| \leq 2}} |\partial_{\alpha_1} v|^{\alpha_1} \dots |\partial_{\alpha_{16}} v|^{\alpha_{16}} \dots |\partial_{\beta_1} w|^{\beta_1} \dots |\partial_{\beta_{16}} w|^{\beta_{16}} \right) \|A_{m,k,j}\|_\infty \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq 17} (1 + 2\eta)^{|\alpha|} \sum_{|\beta|=1,2} (8C_\kappa \|f\|_{C^6})^{|\beta|} 7,64.10^{33} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq 17} (1 + 2\eta)^{|\alpha|} &= \sum_{l=0}^{17} (1 + 2\eta)^l \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{R}^{16} \\ |\alpha|=l}} 1 \\ &\leq \sum_{l=0}^{17} (1 + 2\eta)^l (l + 1)^{16} \end{aligned}$$

De même,

$$\sum_{|\beta|=1,2} (C_\kappa \|f\|_{C^6})^{|\beta|} = \|f\|_{C^6} C_\kappa \left(16 + \underbrace{\binom{16}{2}}_{=120} + 16 \right) C_\kappa \|f\|_{C^6}$$

$$[C_\kappa \|f\|_{C^6} \leq 1/8] \leq 33C_\kappa \|f\|_{C^6}$$

Ainsi,

$$|\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j G_0| \leq 2, 53.10^{35} \sum_{l=0}^{17} (1+2\eta)^l (l+1)^{16} \|f\|_{C^6}$$

Remarque : dans le calcul, nous avons écrit que $\beta \neq 0$, comme on peut le voir facilement en partant de G_0 car alors en dérivant par rapport aux différentes variables, seul un terme en $\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j (w + w^2)$ apparaît, ce qui empêche des annulations telles que $\beta = 0$. Pour $\eta = 10^{-10}$, $\sum_{l=0}^{17} (1+2\eta)^l (l+1)^{16} \leq 2, 0.10^{20}$ et $2, 2.10^{-18} \leq \frac{1}{8C_\kappa} < \frac{\eta}{100}$, d'où, comme $G_0 \equiv \partial_\tau I$ et d'après la condition sur $\|f\|_{C^6}$ de (209) : soit,

$$|\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j \partial_\tau^2 I| \leq 5, 1.10^{55} \|f\|_{C^6} \quad \text{pour } \|f\|_{C^6} \leq 2, 2.10^{-18}$$

En résumé, nous avons obtenu (la même remarque que pour κ_τ s'applique) :

$$i = 0, 1, 2; (m, k, j) \in E, \quad |\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j \partial_\tau^i I| \leq \underbrace{5, 1.10^{55}}_{:=C_I} \|f\|_{C^6} \quad \text{pour } \|f\|_{C^6} \leq 2, 2.10^{-18}$$

Calcul de C_3 et C_4

Ces bornes étant calculées, nous pouvons finalement obtenir les dérivées de P grâce à (196) que nous rappelons ici :

$$\partial_\tau P_\tau = -\frac{\partial_\tau I}{\partial_P I}$$

Pour estimer les dérivées successives de $\partial_\tau P$, nous allons à nouveau utiliser une méthode similaire avec des polynômes que nous avons employée ci-dessus. Notons $h = \partial_P I$. $\partial_\tau P_\tau$ peut se voir comme un polynôme de degré 1 (en $\partial_\tau I$) que multiplie h^{-1} . De manière générale, considérons :

$$F_n = \sum_{k \geq 1} P_{n,k} h^{-k}$$

où les $P_{n,k}$ sont des polynômes à $16.3 = 48$ variables en les $\partial_P^m \partial_\varphi^k \partial_x^j \partial_\tau^i I$ ($i = 0, 1, 2; (m, j, k) \in E$), nuls à partir d'un certain rang. En dérivant par rapport à une variable quelconque z , on a :

$$\begin{aligned} \partial_z F_n &= \sum_{k \geq 1} \partial_z P_{n,k} h^{-k} - k P_{n,k} (\partial_z h) h^{-(k+1)} \\ &= \sum_{k \geq 1} P_{n+1,k}^{(z)} h^{-k} \end{aligned}$$

avec $P_{n+1,k}^{(z)} := \partial_z P_{n,k} - (k-1)P_{n,k-1} \partial_z h$ pour tout $k \geq 1$, ou :

$$P_{n+1,k}^{(z)} = \sum_{l=1}^{48} \frac{\partial P_{n,k}}{\partial X_l} \partial_z (\partial_{\alpha_l} I) - (k-1)P_{n,k-1} \partial_z h$$

$$\begin{aligned} p_{n+1,k} &\leq \max(p_{n,k}, p_{n,k-1} + 1) \\ \|P_{n+1,k}\| &\leq 48p_{n,k} \|P_{n,k}\| + (k-1) \|P_{n,k-1}\| \end{aligned}$$

Comme les dernières majorations sont indépendantes de la variable z , on peut bien indiquer les itérations correspondant à des dérivées successives par l'indice n indépendamment de la variable de dérivation.

Au départ, on a :

$$\begin{aligned} \|P_{0,1}\| &= 1 \\ p_{0,1} &= 1 \\ \|P_{0,k}\| = p_{0,k} &= 0 \quad \forall k > 1 \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate montre alors que :

$$\begin{aligned} p_{n,k} &\leq k \quad \forall n \geq 0, k \geq 1 \\ K &= n + 1 \end{aligned}$$

On peut donc réécrire la formule de récurrence comme :

$$\boxed{\|P_{n+1,k}\| \leq ak\|P_{n,k}\| + (k-1)\|P_{n,k-1}\|}$$

où $a := 48$.

Pour calculer C_3 , on voit qu'il faut aller jusqu'à $n = 6$ car $i = 1, 2; j = 0, 1; k = 1, 2, 3$ et on commence à appliquer l'algorithme à $\partial_\tau P_\tau$.

k	$\ P_{3,k}\ _\infty$	$\ P_{4,k}\ _\infty$	$\ P_{5,k}\ _\infty$	$\ P_{6,k}\ _\infty$
1	a^3	a^4	a^5	a^6
2	$a^2 + 6a$	$3a^3 + 12a^2$	$7a^4 + 24a^3$	$15a^5 + 48a^4$
3	$12a$	$38a^2 + 12a$	$120a^3 + 60a^2$	$374a^4 + 228a^3$
4	6	60a	$354a^2 + 36a$	$1776a^3 + 324a^2$
5		24	360a	$3216a^2 + 144a$
6			120	2520a
7				720

On obtient que :

$$\sum_{k \geq 0} \|P_{8,k}\|_\infty \leq 1,86.10^{10}$$

En adaptant (208) sachant que $|h| \geq \frac{1}{2\pi}$, on trouve :

$$\begin{aligned} C_3 &\leq C_I \left[(2\pi)^{K/2} \sum_{k \geq 0} \|P_{8,k}\|_\infty \sum_{l=0}^{p_{8,k}-1} (C_I \|f\|_{C^6})^l (l+2)^{32} \right] \\ &\leq C_I \left[(2\pi)^{9/2} \sum_{k \geq 0} \|P_{8,k}\|_\infty \right] \sum_{l=0}^8 (C_I \|f\|_{C^6})^l (l+2)^{32} \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{l=0}^8 (C_I \|f\|_{C^6})^l (l+2)^{32} \leq 5,28.10^{13} \quad \text{pour } C_I \|f\|_{C^6} \leq 10^{-3}$$

d'où,

$$\boxed{C_3 = 2.10^{83} \|f\|_{C^6} \quad \text{pour } \|f\|_{C^6} \leq 2.10^{-59}}$$

Calculons enfin la constante C_4 associée aux dérivées de Q . Zelditch et Hezari font remarquer que l'on a la relation suivante :

$$Q(\tau, x, \varphi) = \int_x^{x+2\varphi+P(\tau,x,\varphi)} \kappa_\tau - 2\varphi$$

Comme $i = 1, 2; j = 0, 1; k = 2, 3$, il suffit de traiter le cas où $i = 2, j = 1, k = 3$ qui donne une constante valable également pour les autres ordres de dérivation. Dérivons donc déjà trois fois Q par rapport à φ :

$$\begin{aligned} \partial_\varphi Q &= (2 + \partial_\varphi P)\kappa_\tau(x + 2\varphi + P(\tau, x, \varphi)) - 2 \\ \partial_\varphi^2 Q &= (2 + \partial_\varphi P)^2 \partial_x \kappa_\tau + (\partial_\varphi^2 P)\kappa_\tau \\ \partial_\varphi^3 Q &= (2 + \partial_\varphi P)^3 \partial_x^2 \kappa_\tau + 2(\partial_\varphi^2 P)(2 + \partial_\varphi P)\partial_x \kappa_\tau + (\partial_\varphi^3 P)\kappa_\tau + (\partial_\varphi^2 P)(2 + \partial_\varphi P)\partial_x \kappa_\tau \end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned} \partial_\varphi^3 Q &= (2 + \partial_\varphi P)^3 \partial_x^2 \kappa_\tau + 3(\partial_\varphi^2 P)(2 + \partial_\varphi P)\partial_x \kappa_\tau + (\partial_\varphi^3 P)\kappa_\tau \\ &= P_{0,2} \partial_x^2 \kappa_\tau + P_{0,1} \partial_x \kappa_\tau + P_{0,0} \kappa_\tau \end{aligned}$$

où $P_{0,0}, P_{0,1}, P_{0,2}$ sont des polynômes à $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ variables en les $\partial_x^j \partial_\varphi^k \partial_\tau^i P$ et les évaluations des dérivées de κ_τ se font en $x + 2\varphi + P(x, \varphi, \tau)$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \|P_{0,0}\| &\leq 1 & p_{0,0} &\leq 1 \\ \|P_{0,1}\| &\leq 6 & p_{0,1} &\leq 2 \\ \|P_{0,2}\| &\leq 12 & p_{0,2} &\leq 3 \end{aligned}$$

Considérons alors la quantité suivante :

$$G_n = \sum_{n \geq 0} P_{n,k} \partial_x^n \kappa_\tau$$

où les $P_{n,k}$ sont nuls à partir d'un certain rang. De même que pour F_n - voir ci-dessus, on arrive alors à un formule de récurrence pour les normes infinies et les degrés des polynômes $P_{n,k}$:

$$P_{n+1,k}^{(z)} = \sum_{l=1}^{24} \frac{\partial P_{n,k}}{\partial X_l} \partial_z (\partial_{\alpha_l} P) + P_{n,k-1} A_z$$

où $A_z \in \{\partial_\tau P, (2 + \partial_\varphi P), (1 + \partial_x P)\}$. En utilisant la majoration obtenue à (205) pour majorer le terme en A_z , on obtient la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} p_{n+1,k} &\leq \max(p_{n,k}, p_{n,k-1} + 1) \\ \|P_{n+1,k}\| &\leq 24 p_{n,k} \|P_{n,k}\| + 4 \|P_{n,k-1}\| \end{aligned}$$

où l'on a à nouveau omis l'indice z les majorations ne dépendant pas de la variable de dérivation.

Partant de $\partial_\varphi^3 Q := G_0$, il faut aller jusqu'à $n = 3$ et on obtient les résultats ci-dessous :

k	$p_{0,k}$	$\ P_{0,k}\ _\infty$	$p_{1,k}$	$\ P_{1,k}\ _\infty$	$p_{2,k}$	$\ P_{2,k}\ _\infty$	$p_{3,k}$	$\ P_{3,k}\ _\infty$
0	1	1	1	24	1	576	1	13824
1	2	6	2	292	2	14112	2	679680
2	3	12	3	888	3	65104	3	4743936
3			4	48	4	8160	4	1043776
4					5	192	5	55680
5							6	768

On obtient que :

$$\sum_{k \geq 1} \|P_{3,k}\| \leq 6, 53 \cdot 10^6$$

Il vient que,

$$\begin{aligned} |\partial_\varphi^k \partial_x^j \partial_\tau^i Q| &\leq \sum_{k \geq 1} \|P_{3,k}\| \left[\sum_{l=0}^6 (C_3 \|f\|_{C^6})^l (l+1)^{24} \right] C_\kappa \|f\|_{C^6} + \|P_{3,0}\| \sum_{0 < |\alpha| \leq 1} (C_3 \|f\|_{C^6})^{|\alpha|} .2 \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \|P_{3,k}\| \left[\sum_{l=0}^6 (C_3 \|f\|_{C^6})^l (l+1)^{24} \right] C_\kappa \|f\|_{C^6} + 48 \|P_{3,0}\| C_3 \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{l=0}^6 (C_3 \|f\|_{C^6})^l (l+1)^{24} \leq 6,46.10^5 \quad \text{pour } C_3 \|f\|_{C^6} \leq 10^{-3}$$

d'où,

$$\boxed{C_4 = 1,4.10^{89} \quad \text{pour } \|f\|_{C^6} \leq 2.10^{-86}}$$

En tenant compte des relations entre C_3, C_4 et C_1, C_2 , on peut finalement conclure.

6.9.4 Preuve du théorème 3.3

Pour le démontrer, on a besoin de plusieurs lemmes et constants, que l'on presente dans les deux parties suivantes :

On note ε_0 et C_0 les deux constantes calculées dans lemma 3.11.

LEMME : 3.14

Soit $C > 0$ and $\delta > 0$. Supposons que $\varphi \leq \frac{C}{q}$, lorsque $\|f\|_{C^6} \leq \min \left\{ \frac{\ln(1+\delta)}{C(1+\delta)} \frac{1}{C_0}, \varepsilon_0 \right\}$ qui dépend les choix de C et δ , pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\tau \in [0, 1]$, tous les angles de réflexion de l'orbite $\{\beta_\tau^j(x, \varphi)\}$ sont majorés par $C(1+\delta)/q$. En plus, si $\varphi \geq \frac{C}{q}$, tous les angles de réflexion de l'orbite sont minorés par $\frac{C}{q(1+\delta)}$.

PREUVE :

$\hat{\beta}_\tau(x, \varphi) = (x + 2\varphi + P_\tau(x, \varphi), \varphi + Q_\tau(x, \varphi))$, en utilisant le lemme au-dessus, lorsque $\|f\|_{C^6} \leq \varepsilon_0$, on a $|Q_\tau| \leq C_0 \varphi^2 \|f\|_{C^6}$, où ε_0 et C_0 sont obtenue dans le lemma 2.4.

On peut montrer par l'induction que

$$\varphi_j \leq \frac{C}{q} \left(1 + \frac{A}{q}\right)^j$$

où $e^A = 1 + \delta$

En fait, lorsque $j = 0$, on a $\varphi_0 \leq \frac{C}{q}$ dans l'énoncé, si on a déjà montré l'inégalité pour l'indice j , par définition, $\varphi_{j+1} = \varphi_j + Q_\tau(x_j, \varphi_j) = \varphi_j(1 + \varphi_j O(\|f\|_{C^6}))$. Si on prend $\|f\|_{C^6} \leq \frac{A}{C(1+\delta)} \frac{1}{C_0}$, on a

$$\varphi_j O(\|f\|_{C^6}) \leq \frac{C(1+\delta)}{q} O(\|f\|_{C^6}) \leq \frac{C(1+\delta)}{q} \frac{A}{C(1+\delta)} \frac{1}{C_0} \leq \frac{A}{q}$$

enfin, on obtient :

$$\varphi_{j+1} \leq \varphi_j \left(1 + \frac{A}{q}\right) \leq \frac{C}{q} \left(1 + \frac{A}{q}\right)^j$$

Du coup, pour tout j , on a $\varphi_j \leq \frac{C}{q} \left(1 + \frac{A}{q}\right)^j$.

Par cette inégalité, on peut en déduire directement

$$\varphi_j \leq \frac{C}{q} \left(1 + \frac{A}{q}\right)^j \leq \frac{C}{q} \left(1 + \frac{A}{q}\right)^q \leq \frac{C}{q} e^A \leq \frac{C}{q} (1 + \delta)$$

Par ce lemme, on a le corollaire suivant, qui donne une estimation sur le q-loop angle :

PROPOSITION : 3.15

Pour $\|f\|_{C^6} \leq \min \left\{ \frac{\ln(2)}{1.5\pi} \frac{1}{C_0}, \varepsilon_0 \right\}$, tous les angles de réflexion d'une orbite de q-réflexion de x à x' avec la distance $|x - x'| \leq \frac{l_\tau}{100}$, sont plus petits que $\frac{3\pi}{2q}$.

PREUVE :

soit $\{x_j(\tau, x, \alpha)\}_{0 \leq j \leq q}$ l'orbite qui commence par x , finit par x' . Par la définition, $x_q(\tau, x, \alpha) = x' + l_\tau$, où $l_\tau = 2\pi + O(\|f\|_{C^6})$, ici $O(\|f\|_{C^6}) \leq 4\pi\|f\|_{C^6}$. On a :

$$\sum_{i=0}^{q-1} x_{i+1} - x_i = x_q - x_0 = x' - x + l_\tau$$

cela implique qu'il existe un $0 \leq k \leq q - 1$, tel que :

$$x_{k+1} - x_k \leq \frac{x' - x + l_\tau}{q} \leq \frac{l_\tau}{q} \frac{101}{100} \leq \frac{2\pi + 4\pi\|f\|_{C^6}}{q} \frac{101}{100}$$

Soit $\delta \geq \frac{1}{100}$, $\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{2}\delta$, on en déduit :

$$x_{k+1} - x_k \leq \frac{2(1 + \delta)^2\pi}{q}$$

D'un autre coté, on a :

$$x_{k+1} - x_k \geq \frac{2}{\kappa_{\max}} \varphi_k$$

Si on prend $\|f\|_{C^6} \leq \frac{\delta}{500}$, puisque $|\kappa_\tau - 1| \leq 500\|f\|_{C^2}$, on a :

$$\frac{2(1 + \delta)^2\pi}{q} \geq x_{k+1} - x_k \geq \frac{2}{1 + \delta} \varphi_k$$

cela implique que $\varphi_k \leq \frac{(1+\delta)^3}{q} \pi$.

On applique le lemme au-dessus deux fois avec $C = (1 + \delta)^3\pi$, une fois en direction positive, une fois en direction négative, du coup, lorsque $\|f\|_{C^6} \leq \min \left\{ \frac{\ln(1+\delta)}{(1+\delta)^4\pi} \frac{1}{C_0}, \varepsilon_0 \right\}$:

$$\varphi_j \leq \frac{(1 + \delta)^4}{q} \pi, 0 \leq j \leq q - 1$$

Enfin on prend $\delta = \frac{1}{10}$ et on en déduit le corollaire.

THÉORÈME :

Pour tout $C > 0$, $q \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, 1]$, $\varphi \leq \frac{C}{q}$, pour toute $\|f\|_{C^6} \leq \min \left\{ \frac{\ln(2)}{2C} \frac{1}{C_0}, \varepsilon_0, \frac{q^2}{48C_0}, \frac{1}{2\pi C_0} \right\}$, on a

$$\begin{aligned} |\partial_\tau x_q(\tau, x, \varphi)| &\leq q\varphi C^2 e^{2C} C_0 \|f\|_{C^6} \\ |\partial_\varphi x_q(\tau, x, \varphi) - 2q| &\leq qC^2 e^{2C} C_0 \|f\|_{C^6} \\ |x_q - x - 2q\varphi| &\leq q\varphi C^2 e^{2C} C_0 \|f\|_{C^6} \end{aligned}$$

où $C_0 = 3.10^{90}$, et $\varepsilon_0 = 2.10^{-86}$

PREUVE :

Dans le lemme 3.14, on prend $\delta = 1$, par conséquent, tous les angles de réflexion de l'orbite $\{\beta_\tau^j(x, \varphi)\}$ sont majorés par $2C/q$. Par le lemme 3.11, on a $\partial_x P_\tau \leq \varphi C_0 \|f\|_{C^6}$, $\partial_\varphi Q_\tau \leq \varphi C_0 \|f\|_{C^6}$, comme $\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{2\pi C_0}$, et $\varphi \leq \pi$, on a $\partial_x P_\tau \leq \frac{1}{2}$, $\partial_\varphi Q_\tau \leq \frac{1}{2}$, puisque $\varphi \leq \frac{C}{q}$, on a

aussi $\partial_x P_\tau \leq \frac{C}{q}$, $\partial_\varphi Q_\tau \leq \frac{C}{q}$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \partial_\varphi \pi_1 \circ \hat{\beta}_\tau^q(x, \varphi) &= \partial_\varphi \pi_1 \circ \left(\sum_{i=0}^{q-1} \hat{\beta}_\tau^i \circ \partial_\tau \hat{\beta}_\tau \circ \hat{\beta}_\tau^{q-i-1} \right) (x, \varphi) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\sum_{i=0}^{q-1} D \hat{\beta}_\tau^i \circ D \partial_\tau \hat{\beta}_\tau \circ D \hat{\beta}_\tau^{q-i-1} \right) (x, \varphi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D \hat{\beta}_\tau &= \begin{pmatrix} 1 + \partial_x P_\tau & 2 + \partial_\varphi P_\tau \\ \partial_x Q_\tau & 1 + \partial_\varphi Q_\tau \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \partial_x P_\tau & 0 \\ 0 & 1 + \partial_\varphi Q_\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 + \partial_\varphi P_\tau \\ \partial_x Q_\tau & 0 \end{pmatrix} \\ &\leq \max\{1 + |\partial_x P|, 1 + |\partial_\varphi Q_\tau|\} \left[I + \begin{pmatrix} 0 & \frac{2 + \partial_\varphi P_\tau}{1 + |\partial_x P|} \\ \frac{\partial_x Q_\tau}{1 + |\partial_x P|} & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &\leq \max\{1 + |\partial_x P|, 1 + |\partial_\varphi Q_\tau|\} \left[I + \begin{pmatrix} 0 & 4 + 2|\partial_\varphi P_\tau| \\ 2|\partial_x Q_\tau| & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D \partial_\tau \hat{\beta}_\tau &= \begin{pmatrix} \partial_\tau \partial_x P_\tau & \partial_\tau \partial_\varphi P_\tau \\ \partial_\tau \partial_x Q_\tau & \partial_\tau \partial_\varphi Q_\tau \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} \varphi C_0 \|f\|_{C^6} & C_0 \|f\|_{C^6} \\ \varphi^2 C_0 \|f\|_{C^6} & \varphi C_0 \|f\|_{C^6} \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} \frac{C}{q} C_0 \|f\|_{C^6} & C_0 \|f\|_{C^6} \\ \frac{C^2}{q^2} C_0 \|f\|_{C^6} & \frac{C}{q} C_0 \|f\|_{C^6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 + 2|\partial_\varphi P_\tau| \\ 2|\partial_x Q_\tau| & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 8|\partial_x Q_\tau| + 4|\partial_\varphi P_\tau||\partial_x Q_\tau| & 0 \\ 0 & 8|\partial_x Q_\tau| + 4|\partial_\varphi P_\tau||\partial_x Q_\tau| \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} 12|\partial_x Q_\tau| & 0 \\ 0 & 12|\partial_x Q_\tau| \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} \frac{48C^2}{q^2} C_0 \|f\|_{C^6} & 0 \\ 0 & \frac{48C^2}{q^2} C_0 \|f\|_{C^6} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} \frac{C^2}{q^2} O_2(\|f\|_{C^6}) & 0 \\ 0 & \frac{C^2}{q^2} O_2(\|f\|_{C^6}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

comme $\|f\|_{C^6} \leq \frac{q^2}{48C_0}$, on a $O_2(\|f\|_{C^6}) \leq 1$.

$$\begin{aligned} (I + B)^j &= \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} B^m \\ &= \sum_{m=0}^{[j/2]} \binom{j}{2m} B^{2m} + \sum_{m=0}^{[j-1/2]} \binom{j}{2m+1} B^{2m+1} \\ &\leq \sum_{m=0}^{[j/2]} \binom{j}{2m} \frac{C^{2m}}{q^{2m}} O_2(\|f\|_{C^6})^{2m} + \sum_{m=0}^{[j-1/2]} \binom{j}{2m+1} \frac{C^{2m}}{q^{2m}} O_2(\|f\|_{C^6})^{2m+1} \\ &\leq \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{C}{q}\right)^j & 10j \left(1 + \frac{C}{q}\right)^{j-1} \\ \frac{C}{q} \left(1 + \frac{C}{q}\right)^j & \left(1 + \frac{C}{q}\right)^j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |D\hat{\beta}_\tau^j| &\leq \max\{1 + |\partial_x P|, 1 + |\partial_\varphi Q_\tau|\}^j \begin{pmatrix} 1 & 10j \\ \frac{C}{q} & 1 \end{pmatrix} \left(1 + \frac{C}{q}\right)^j \\ &\leq \begin{pmatrix} 1 & 10j \\ \frac{C}{q} & 1 \end{pmatrix} \left(1 + \frac{C}{q}\right)^{2j} \end{aligned}$$

$$|\partial_\tau \partial_\varphi \pi_1 \circ \hat{\beta}_\tau^q(x, \varphi)| \leq C^2 e^{2C} q C_0 \|f\|_{C^6}$$

Après avoir fait des pour des raisons techniques, on va montrer un théorème un peu plus fort que théorème 3.3 :

THÉORÈME : 3.4

Soit $\partial\Omega = \partial D + fN_0$, il existe une ε_0 suffisamment petite, tel que si $\|f\|_{C^6} \leq \min\left\{\ln(2)\frac{1}{C_0}, \varepsilon_0, \frac{q^2}{48C_0}, \frac{1}{2\pi C_0}, \frac{\ln(2)}{1.5\pi} \frac{1}{C_0}\right\}$, où $C_0 = 3.10^{90}$ et $\varepsilon_0 = 2.10^{-86}$, pour chaque $\tau \in [0, 1]$, s et s' deux points sur $\partial\Omega$ dont la distance $|s - s'| < \frac{l_\tau}{100}$, et $q \geq 2$, il existe un unique angle $\alpha_q(\tau, s, s') \in [0, \pi]$, tel que l'orbite commence par s et revient à s' après exactement q réflexions, en circulant exactement une fois autour de $\partial\Omega$. En plus, $\alpha_q(\tau, s)$ est lisse en s et analytique en τ .

Si on prend $s' = s$ dans le théorème 3.4, on déduit le théorème 3.2, plus précisément, on remarque que $\alpha_q(\tau, s, s) = \alpha_q(\tau, s)$.

PREUVE :

Par le corollaire 3.15, lorsque $\|f\|_{C^6} \leq \min\left\{\frac{\ln(2)}{1.5\pi} \frac{1}{C_0}, \varepsilon_0\right\}$, on a tous angles de réflexion d'un orbit de q -réflexion sont plus petit que $\frac{3\pi}{2q}$.

Dans le théorème 3.13, on prend $C = 0.5$ et on a :

$$|\partial_\varphi x_q(\tau, x, \varphi) - 2q| \leq qC^2 e^{2C} C_0 \|f\|_{C^6} < 2q$$

lorsque $\|f\|_{C^6} \leq \min\left\{\ln(2)\frac{1}{C_0}, \varepsilon_0, \frac{q^2}{48C_0}, \frac{1}{2\pi C_0}\right\}$ donc, on a que $x_q(\tau, x, \varphi)$ est croissante en φ , et on a aussi :

$$x_q(\tau, x, 0) = 0, x_q(\tau, x, 3\pi/2q) = x + 3\pi + O(\|f\|_{C^6}) > x' + l_\tau$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il exsiste un unique $\varphi = \alpha(\tau, s, s')$ sur $[0, 3\pi/2q]$, tel que

$$x_q(\tau, x, \alpha_q(\tau, x, x')) = x' + l_\tau$$

Enfin, en utilisant le théorème des fonctions implicites, on en déduit que $\alpha_q(\tau, s, s')$ est lisse en s et s' et analytique en τ .

6.9.5 Preuve du lemme 4.6

On rappelle l'énoncé du lemme :

LEMME : 4.6

Soit $\partial\Omega_\tau = \partial D + \tau f N_0$ et Ω quasi-circulaire en C^6 , on suppose que $\|f\|_{C^6} \leq \min \left\{ \frac{1}{1000A}, \frac{1}{100(12\pi+4)}\eta_0 \right\} := \aleph_0$, où $\eta_0 = 2(q_0 + 1) \sin(\pi/(q_0 + 1))2q_0 \sin(\pi/q_0)$, $q_0 = 1000B$. On suppose de plus que $\|f\|_{C^8} \leq 1$.

Pour $q \geq q_0$, on a :

$$\begin{aligned} t_{q+1}(\tau) - T_q(\tau) &\geq \frac{1}{10(q+1)^3} \\ T_q(\tau) - t_q(\tau) &\leq \frac{1}{100(q+1)^3} \end{aligned}$$

pour $q \leq q_0$, on a :

$$\begin{aligned} t_{q+1}(\tau) - T_q(\tau) &\geq \frac{\eta_0}{10} \\ T_q(\tau) - t_q(\tau) &\leq \frac{\eta_0}{100} \end{aligned}$$

Dans le lemme 4.3, on a déjà les résultats suivants :

$$\begin{aligned} |T_q - t_q| &\leq Aq^{-3}\|f\|_{C^6} + Bq^{-4} \\ \left| T_q - l_\tau + \frac{1}{4q^2} \int_0^{l_\tau} \kappa_\tau^{2/3}(s) ds \right| &\leq Aq^{-3}\|f\|_{C^6} + Bq^{-4} \end{aligned}$$

D'où l'on écrit $T_q = l_\tau - \frac{1}{4q^2} \int_0^{l_\tau} \kappa_\tau^{2/3}(s) ds + O(\|f\|_{C^6})$ avec $|O(\|f\|_{C^6})| \leq Aq^{-3}\|f\|_{C^6} + Bq^{-4}$, comme $q \geq 2$, on a $(q+1)^3 \leq 5q^3$, et $\frac{B}{q^4} \leq \frac{5B}{(q+1)^3q}$, $\frac{A}{q^3}\|f\|_{C^6} \leq \frac{5A}{(q+1)^3}\|f\|_{C^6}$. Puisque $q > 1000B$, et $\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{1000A}$, on a :

$$|O(\|f\|_{C^6})| \leq Aq^{-3}\|f\|_{C^6} + Bq^{-4} \leq \frac{1}{200(q+1)^3} + \frac{1}{200(q+1)^3} \leq \frac{1}{100(q+1)^3}$$

et on en déduit :

$$|T_q - t_q| \leq Aq^{-3}\|f\|_{C^6} + Bq^{-4} \leq \frac{1}{100(q+1)^3}$$

Comme Ω est quasi-circulaire en C^6 (i.e satisfait la condition dans le théorème 3.2), on a $\kappa_\tau \geq \frac{1}{2}$, et $l_\tau \geq \pi$, d'où :

$$\int_0^{l_\tau} \kappa_\tau^{2/3}(s) ds \geq \int_0^{l_\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} ds \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} l_\tau \geq \frac{1}{4}\pi$$

Par cela on peut estimer $|T_{q+1} - T_q|$:

$$\begin{aligned} |T_{q+1} - T_q| &= \left| l_\tau - \frac{1}{4(q+1)^2} \int_0^{l_\tau} \kappa_\tau^{2/3}(s) ds - l_\tau + \frac{1}{4q^2} \int_0^{l_\tau} \kappa_\tau^{2/3}(s) ds + 2O(\|f\|_{C^6}) \right| \\ &\geq \int_0^{l_\tau} \kappa_\tau^{2/3}(s) ds \left(\frac{1}{4q^2} - \frac{1}{4(q+1)^2} \right) - 2|O(\|f\|_{C^6})| \\ &\geq \frac{\pi}{16} \frac{2q+1}{q^2(q+1)^2} - 2 \frac{1}{100(q+1)^3} \\ &\geq \frac{\pi}{8} \frac{1}{(q+1)^3} - \frac{1}{50(q+1)^3} \end{aligned}$$

Enfin, on arrive à estimer $t_{q+1} - T_q$:

$$\begin{aligned} t_{q+1} - T_q &\geq |T_{q+1} - T_q| - |T_{q+1} - t_{q+1}| \\ &\geq \frac{\pi}{8} \frac{1}{(q+1)^3} - \frac{1}{50(q+1)^3} - \frac{1}{100(q+1)^3} \\ &\geq \frac{1}{10}(q+1)^3 \end{aligned}$$

Lorsque $q \leq q_0 = 1000B$, on note $\eta_0 = 2(q_0 + 1) \sin(\pi/(q_0 + 1))2q_0 \sin(\pi/q_0)$. Comme $\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{100(12\pi+4)}\eta_0$, on a $(12\pi + 4)\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{100}\eta_0$. Par le lemme 4.5, on en déduit :

$$|T_q - t_q| \leq (12\pi + 4)\|f\|_{C^6} \leq \frac{1}{100}\eta_0$$

Pour estimer $t_{q+1} - T_q$, on a les estimations suivantes par le lemme 4.5 :

$$\left| t_{q+1} - 2(q+1) \sin\left(\frac{\pi}{q+1}\right) \right| \leq (6\pi + 2)\|f\|_{C^6}, \quad \left| T_q - 2q \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \right| \leq (6\pi + 2)\|f\|_{C^6}$$

d'où :

$$\begin{aligned} t_{q+1} - T_q &\geq 2(q+1) \sin(\pi/(q+1)) - 2q \sin(\pi/q) - (12\pi + 4)\|f\|_{C^6} \\ &\geq 2(q_0 + 1) \sin(\pi/(q_0 + 1)) - 2q_0 \sin(\pi/q_0) - (12\pi + 4)\|f\|_{C^6} \\ &\geq \eta_0 - \frac{1}{100}\eta_0 \\ &\geq \frac{1}{10}\eta_0 \end{aligned}$$

Références

- [1] Frank Pacard. Analyse réelle et introduction aux méthodes variationnelles. Cours de l'Ecole Polytechnique.
- [2] Frank Laloë Claude Cohen-Tanoudji, Bernard Diu. Mécanique quantique II. Editions Hermann, 1973.
- [3] Sergei Tabachnikov. Geometry and Billiards. Student Mathematical Library, 2005.
- [4] V. F. Lazutkin. The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., Vol. 37, issue 1 :186–216, 1973.
- [5] R.Ramirez-Ros. Break-up of resonant invariant curves in billiards and dual billiards associated to perturbed circular tables. Phys. D, 214(1) :78–87, 2006.
- [6] Mark Kac. Can one hear the shape of a drum ? The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4, Part 2 :1–23, Apr., 1966.
- [7] S.Zelditch H.Hezari. One can hear the shape of ellipses of small eccentricity. arXiv :1907.03882, Jul., 2019.
- [8] J. De Simoi A. Avila and V. Kaloshin. An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse. Ann. of Math., (2) 184, no. 2 :527–558, 2016.
- [9] S. Musser. Weyl's law on riemannian manifolds. University of Chicago, Aug. 29, 2016.
- [10] M. Stevenson. Weyl's law. University of Michigan, Oct. 31, 2014.
- [11] Steve Zelditch. Eigenfunctions of the Laplacian on a Riemannian Manifold. CBMS, 2017.
- [12] J.Bell. Tauber's theorem and karamata's proof of the hardy-littlewood tauberian theorem. University of Toronto, Nov. 11, 2017.
- [13] Yaiza Canzani. Analysis on manifolds via the laplacian. Harvard University, Math 253, Fall 2013.
- [14] D.L. Webb C. Gordon and S. Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 27, No 1., Jul., 1992.
- [15] S. Zelditch. Ellipses of small eccentricity are determined by their dirichlet (or, neumann) spectra. Disponible en ligne : <https://www.youtube.com/watch?v=sL73RYikETw> (consulté le 15/09/20), April 2020.